Научно-техническая олимпиада «Старт в науку»
2023-2024 уч. года
Математика
Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Черновики не проверяются.

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 5.

Максимальное число баллов за олимпиаду по математике 20.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит **0 баллов**.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается **1 балл**.

М9.1-1 Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных целых корня. Могло ли оказаться, что число $3p^2 + (q-3)^2$ — простое?

Ответ. Не могло.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения. По теореме Виета

$$3p^2 + (q-3)^2 = 3(-x_1 - x_2)^2 + (x_1 \cdot x_2 - 3)^2 = (x_1^2 + 3)(x_2^2 + 3).$$

Остаётся заметить, что оба сомножителя $x_1^2 + 3$ и $x_2^2 + 3$ являются натуральными числами, отличными от единицы.

Комментарий. Записана теорема Виета — баллы не добавляются.
Выражение разложено на множители, содержащие квадраты корней — 4 балла.
Замечено, что каждый из сомножителей больше единицы — 1 балл.
Неверно записана теорема Виета — не более 2 баллов за задачу.

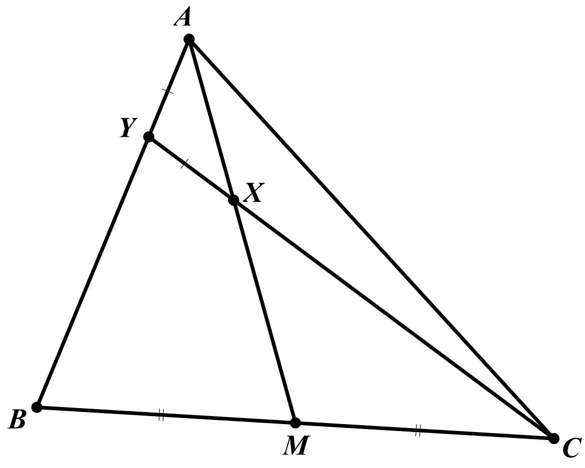
М9.2-1 Решите неравенство $\sqrt{2x} + \sqrt{x-4} \leq 14 - x$.

Ответ. $x \in [4; 8]$.

Решение. Заметим, что областью определения функции, стоящей в левой части неравенства, является множество $x \geq 4$. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{2x} + \sqrt{x-4} + x \leq 14$: его левая часть является строго возрастающей на своей области определения функцией. Поскольку равенство достигается при $x = 8$, решением неравенства будет множество $[4; 8]$.

Комментарий. Найдено ОДЗ — баллы не добавляются.
Неэквивалентное преобразование неравенств — 0 баллов за задачу.
Ответ отличается от верного конечным числом точек — снять 1 балл.

М9.3-1 В треугольнике ABC проведена медиана AM, а затем на отрезке AM взята точка X. Луч CX пересекает сторону AB в такой точке Y, что $AY = YX$. Найдите отношение площадей $S_{ACX} : S_{BYX}$, если $S_{YCB} : S_{XCB} = 6 : 5$.



Ответ. $S_{ACX} : S_{BYX} = 5 : 4$.

Решение. Из теоремы Менелая для треугольника BYC следует, что $CX = BY$:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CX}{XY} \cdot \frac{YA}{AB} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{CX}{AB} = 1.$$

Из равенства $S_{YCB} : S_{XCB} = 6 : 5$ следует, что $YC : XC = 6 : 5$, то есть

$$\frac{YX}{XC} = \frac{1}{5} = \frac{AY}{AB}.$$

Значит, $S_{ACX} : S_{AXY} = XC : XY = 5$, а $S_{BYX} : S_{AXY} = BY : AY = 4$. Отсюда $S_{ACX} : S_{BYX} = 5 : 4$.

Комментарий. Доказано, что $CX = AB$ — 3 балла.

M9.4-1 Найдите количество способов расставить числа 204, 206, 208, 210, 212, 214, 216 в ряд так, чтобы сумма любых четырёх подряд идущих чисел делилась на 6.

Ответ. 144.

Решение. Поскольку все числа чётные, будем рассматривать делимость только на 3. Пусть x_1, $x_2, \ldots, x_7$ — остатки от деления на 3 чисел в искомой перестановке. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ и $x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ делятся на 3 (поскольку суммы соответствующих четвёрок чисел делятся на 3), а сумма этих четвёрок имеет такой же остаток от деления на 3, как и x_4 (так как сумма всех 7 исходных чисел делится на 3). Значит, x_4 обязан равняться нулю. Тогда остатки x_1, x_2 и x_3 — это произвольная перестановка 0, 1 и 2, а x_5, x_6 и x_7 однозначно определяются по $x_2+x_3+x_4$, $x_3+x_4+x_5$ и $x_4+x_5+x_6$ соответственно. Выбрать порядок остатков x_1, x_2, x_3 можно $3!$ способами, выбрать четвёртое число (с остатком $x_4 = 0$) — тремя способами, а распределить три пары чисел с одинаковыми остатками в первую и вторую тройки соответственно — 2^3 способами. Получаем в итоге $3! \cdot 3 \cdot 2^3 = 144$ расстановки.

Комментарий. Показано, что $x_4 = 0$ — 2 балла.
Комбинаторная ошибка — не более 3 баллов за задачу.
Ответ не доведён до числа — снять 1 балл.
Задача сведена к рассмотрению остатков от деления чисел на 3 — баллы не добавляются.

M9.1-2 Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных целых корня. Могло ли оказаться, что число $2p^2 + (q-2)^2$ — простое?

Ответ. Не могло.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения. По теореме Виета

$$2p^2 + (q-2)^2 = 2(-x_1 - x_2)^2 + (x_1 \cdot x_2 - 2)^2 = (x_1^2 + 2)(x_2^2 + 2).$$

Остаётся заметить, что оба сомножителя $x_1^2 + 2$ и $x_2^2 + 2$ являются натуральными числами, отличными от единицы.

Комментарий. Записана теорема Виета — баллы не добавляются.
Выражение разложено на множители, содержащие квадраты корней — 4 балла.
Замечено, что каждый из сомножителей больше единицы — 1 балл.
Неверно записана теорема Виета — не более 2 баллов за задачу.

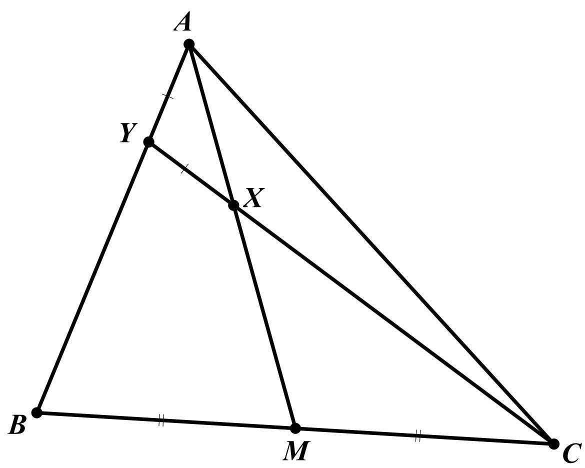
M9.2-2 Решите неравенство $\sqrt{3x} + \sqrt{x-8} \leq 20 - x$.

Ответ. $x \in [8; 12]$.

Решение. Заметим, что областью определения функции, стоящей в левой части неравенства, является множество $x \geq 8$. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{3x}+\sqrt{x-8}+x \leq 20$: его левая часть является строго возрастающей на своей области определения функцией. Поскольку равенство достигается при $x = 12$, решением неравенства будет множество $[8; 12]$.

Комментарий. Найдено ОДЗ — баллы не добавляются.
Неэквивалентное преобразование неравенств — 0 баллов за задачу.
Ответ отличается от верного конечным числом точек — снять 1 балл.

M9.3-2 В треугольнике ABC проведена медиана AM, а затем на отрезке AM взята точка X. Луч CX пересекает сторону AB в такой точке Y, что $AY = YX$. Найдите отношение площадей $S_{ACX} : S_{BYX}$, если $S_{YCB} : S_{XCB} = 4 : 3$.



Ответ. $S_{ACX} : S_{BYX} = 3 : 2$.

Решение. Из теоремы Менелая для треугольника BYC следует, что $CX = BY$:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CX}{XY} \cdot \frac{YA}{AB} = 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{CX}{AB} = 1.$$

Из равенства $S_{YCB} : S_{XCB} = 4 : 3$ следует, что $YC : XC = 4 : 3$, то есть

$$\frac{YX}{XC} = \frac{1}{3} = \frac{AY}{AB}.$$

Значит, $S_{ACX} : S_{AXY} = XC : XY = 3$, а $S_{BYX} : S_{AXY} = BY : AY = 2$. Отсюда $S_{ACX} : S_{BYX} = 3 : 2$.

Комментарий. Доказано, что $CX = AB$ — 3 балла.

M9.4-2 Найдите количество способов расставить числа 408, 412, 416, 420, 424, 428, 432 в ряд так, чтобы сумма любых четырёх подряд идущих чисел делилась на 12.

Ответ. 144.

Решение. Поскольку все числа делятся на 4, будем рассматривать делимость только на 3. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_7$ — остатки от деления на 3 чисел в искомой перестановке. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ и $x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ делятся на 3 (поскольку суммы соответствующих четвёрок чисел делятся на 3), а сумма этих четвёрок имеет такой же остаток от деления на 3, как и x_4 (так как сумма всех 7 исходных чисел делится на 3). Значит, x_4 обязан равняться нулю. Тогда остатки x_1, x_2 и x_3 — это произвольная перестановка 0, 1 и 2, а x_5, x_6 и x_7 однозначно определяются по $x_2+x_3+x_4$, $x_3+x_4+x_5$ и $x_4+x_5+x_6$ соответственно. Выбрать порядок остатков x_1, x_2, x_3 можно $3!$ способами, выбрать четвёртое число (с остатком $x_4 = 0$) — тремя способами, а распределить три пары чисел с одинаковыми остатками в первую и вторую тройки соответственно — 2^3 способами. Получаем в итоге $3! \cdot 3 \cdot 2^3 = 144$ расстановки.

Комментарий. Показано, что $x_4 = 0$ — 2 балла.
Комбинаторная ошибка — не более 3 баллов за задачу.
Ответ не доведён до числа — снять 1 балл.
Задача сведена к рассмотрению остатков от деления чисел на 3 — баллы не добавляются.

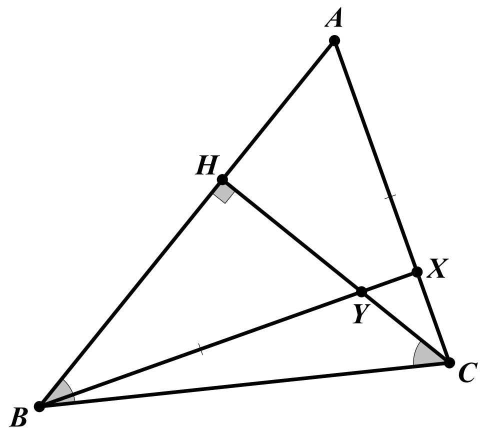
M10.1-3 При каких значениях параметра t уравнение $t^2x^2 + (2|t| - 1)x + 1 = 0$ имеет ровно одно решение?

Ответ. $0, \pm\frac{1}{4}$.

Решение. При $t = 0$ получаем уравнение $-x + 1 = 0$, которое имеет одно решение.
Если же $t \neq 0$, то уравнение является квадратным, а условие того, что корень ровно один, есть равенство нулю дискриминанта D. Запишем это условие: $D = (2|t| - 1)^2 - 4t^2 = 4|t| - 1 = 0$. Отсюда $t = \pm\frac{1}{4}$.

Комментарий. Разобран случай $t = 0$ — 2 балла.
Разобран случай $t \neq 0$ — 3 балла.

M10.2-3 В остроугольном треугольнике ABC известно, что $\angle B = 45°$, CH — высота, X — точка на стороне AC, а Y — точка пересечения отрезков CH и BX. Найдите XY, если $BY = AC = 10$, $S_{ABC} = 60$.



Ответ. 2.

Решение. Поскольку треугольник BCH — равнобедренный, $BH = HC$, а значит, прямоугольные треугольники BHY и CAH равны по катету и гипотенузе. Поэтому $\angle ABX = \angle HCA$, и BX — высота треугольника ABC. Его площадь равна $\frac{1}{2}AC \cdot (AC + XY) = 60$, откуда $XY = 2$.

Комментарий. Получено равенство треугольников BHY и CAH — 2 балла.
Доказано, что BX — высота треугольника ABC — 2 балла.

M10.3-3 Сколько существует упорядоченных наборов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 попарно различных натуральных чисел таких, что $x_k + x_{9-k} = 20$ для всех k от 1 до 4?

Ответ. $C_9^4 \cdot 2^4 \cdot 4! = 48384$.

Решение. Если $x_1 = 10 - u$, $x_2 = 10 - v$, $x_3 = 10 - p$, $x_4 = 10 - q$, то $x_5 = 10 + q$, $x_6 = 10 + p$, $x_7 = 10 + v$, $x_8 = 10 + u$. Выбрать 4 числа u, v, p, q с различными модулями, не превосходящими 9 и не меньшими, чем 1, можно C_9^4 способами. Остаётся распределить выбранные числа по переменным u, v, p и q (4! способов) и выбрать знаки для этих чисел (2^4 способов). Поэтому получаем окончательно $C_9^4 \cdot 2^4 \cdot 4! = 48384$ наборов.

Комментарий. Комбинаторная ошибка — не более 2 баллов за задачу.
Ответ не доведён до числа — снять 1 балл.

M10.4-3 Найдите все пары (x, y) такие, что $x \le 2$, $y \ge 3$ и

$$2y - 2x + \frac{y-1}{2y-5} - \frac{x-1}{2x-5} = 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-1}.$$

Ответ. $\left(2, \dfrac{13}{4}\right)$.

Решение. Уравнение можно переписать в виде

$$\frac{(2x-5+\sqrt{x-1})^2}{2x-5} + \frac{(2y-5-\sqrt{y-1})^2}{5-2y} = 0.$$

Поскольку $x \le 2$, а $y \ge 3$, знаменатели обеих дробей отрицательны, а значит, равенство возможно лишь в том случае, когда $5-2x = \sqrt{x-1}$ и $2y-5 = \sqrt{y-1}$. Уравнение $5-2x = \sqrt{x-1}$ равносильно

$$\begin{cases} 4x^2 - 20x + 25 = x - 1, \\ 5 - 2x \ge 0, \end{cases}$$

откуда $x = 2$. Решив аналогичным образом уравнение $2y - 5 = \sqrt{y-1}$, получаем $y = \dfrac{13}{4}$. Итак, условию удовлетворяет единственная пара $(x, y) = \left(2, \dfrac{13}{4}\right)$.

Комментарий. С помощью выделения полных квадратов уравнение приведено к указанному в решении виду — 3 балла.
Получены посторонние решения — снять по 1 баллу за каждое.

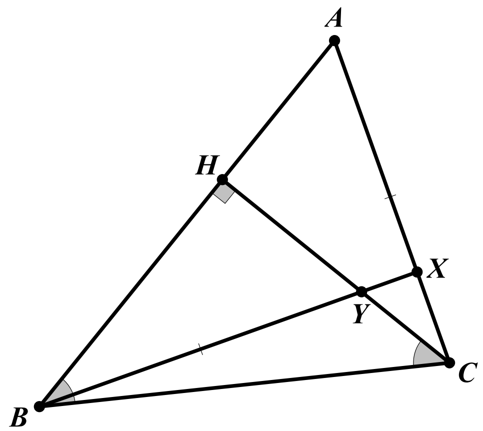
M10.1-4 При каких значениях параметра t уравнение $tx^2+(3-2|t|)x+t=0$ имеет ровно одно решение?

Ответ. $0, \pm\frac{3}{4}$.

Решение. При $t=0$ получаем уравнение $3x=0$, которое имеет одно решение.
Если же $t \neq 0$, то уравнение является квадратным, а условие того, что корень ровно один, есть равенство нулю дискриминанта D. Запишем это условие: $D=(3-2|t|)^2-4t^2=9-12|t|=0$. Отсюда $t=\pm\frac{3}{4}$.

Комментарий. Разобран случай $t=0$ — 2 балла.
Разобран случай $t \neq 0$ — 3 балла.

M10.2-4 В остроугольном треугольнике ABC известно, что $\angle B=45^\circ$, CH — высота, X — точка на стороне AC, а Y — точка пересечения отрезков CH и BX. Найдите XY, если $BY=AC=6$, $S_{ABC}=21$.



Ответ. 1.

Решение. Поскольку треугольник BCH — равнобедренный, $BH=HC$, а значит, прямоугольные треугольники BHY и CAH равны по катету и гипотенузе. Поэтому $\angle ABX = \angle HCA$, и BX — высота треугольника ABC. Его площадь равна $\frac{1}{2}AC\cdot(AC+XY)=21$, откуда $XY=1$.

Комментарий. Получено равенство треугольников BHY и CAH — 2 балла.
Доказано, что BX — высота треугольника ABC — 2 балла.

M10.3-4 Сколько существует упорядоченных наборов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} попарно различных натуральных чисел таких, что $x_k+x_{11-k}=18$ для всех k от 1 до 5?

Ответ. $C_8^5\cdot 2^5\cdot 5!=215040$.

Решение. Если $x_1=9-u$, $x_2=9-v$, $x_3=9-p$, $x_4=9-q$, $x_5=9-r$, то $x_6=9+u$, $x_7=9+v$, $x_8=9+p$, $x_9=9+q$, $x_{10}=9+r$. Выбрать 5 чисел u, v, p, q, r с различными модулями, не превосходящими 8 и не меньшими, чем 1, можно C_8^5 способами. Остаётся распределить выбранные числа по переменным u, v, p, q и r (5! способов) и выбрать знаки для этих чисел (2^5 способов). Поэтому получаем окончательно $C_8^5\cdot 2^5\cdot 5!=215040$ наборов.

Комментарий. Комбинаторная ошибка — не более 2 баллов за задачу.
Ответ не доведён до числа — снять 1 балл.

M10.4-4 Найдите все пары (x, y) такие, что $x \leq 2$, $y \geq 3$ и

$$3y - 3x + \frac{y+1}{3y-7} - \frac{x+1}{3x-7} = 2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{y+1}.$$

Ответ. $\left(\frac{16}{9}, 3\right)$.

Решение. Уравнение можно переписать в виде

$$\frac{(3x-7+\sqrt{x+1})^2}{3x-7} + \frac{(3y-7-\sqrt{y+1})^2}{7-3y} = 0.$$

Поскольку $x \leq 2$, $y \geq 3$, знаменатели обеих дробей отрицательны, а значит, равенство возможно лишь в том случае, когда $7 - 3x = \sqrt{x+1}$ и $3y - 7 = \sqrt{y+1}$. Уравнение $7 - 3x = \sqrt{x+1}$ равносильно

$$\begin{cases} 9x^2 - 42x + 49 = x + 1, \\ 7 - 3x \geq 0, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{16}{9}$. Решив аналогичным образом уравнение $3y - 7 = \sqrt{y+1}$, получаем $y = 3$. Итак, условию удовлетворяет единственная пара $(x, y) = \left(\frac{16}{9}, 3\right)$.

Комментарий. С помощью выделения полных квадратов уравнение приведено к указанному в решении виду — 3 балла.

Получены посторонние решения — снять по 1 баллу за каждое.

M11.1-5 При каких значениях параметра t уравнение $(t^2-4)x^2+2\sqrt{t+2}\cdot x+3=0$ имеет хотя бы одно вещественное решение?

Ответ. $t \in \left(-2; \frac{7}{3}\right]$.

Решение. Для того, чтобы корень был определен, необходимо выполнение неравенства $t \geq -2$.
При $t=2$ получаем уравнение $4x+3=0$, которое имеет решение.
При $t=-2$ левая часть уравнения тождественно равна 3, поэтому уравнение не имеет решений.
Если же $t \neq \pm 2$, то уравнение является квадратным, а условие того, что оно имеет хотя бы один вещественный корень, есть неотрицательность его дискриминанта. Запишем это условие в виде $D_1 = \frac{D}{4} \geq 0$: $D_1 = t+2-3(t^2-4) \geq 0$. Отсюда $t \in \left[-2; \frac{7}{3}\right]$, $t \neq \pm 2$.
Объединяя полученные решения, получаем ответ: $t \in \left(-2; \frac{7}{3}\right]$.
Комментарий. Разобран случай $t^2=4$ — 2 балла.
Разобран случай $t^2 \neq 4$ — 3 балла.

M11.2-5 Найдите все пары положительных вещественных чисел x и y таких, что

$$\begin{cases} 2xy = x^{y-5}, \\ x = 4y^2x^{-y}. \end{cases}$$

Ответ. $(x,y)=\left(1, \frac{1}{2}\right)$ или $(x,y)=\left(\sqrt[7]{26}, 13\right)$.

Решение. Логарифмируем оба уравнения системы:

$$\begin{cases} \ln 2 + \ln x + \ln y = (y-5)\ln x, \\ -2\ln 2 + \ln x - 2\ln y = -y\ln x. \end{cases}$$

Прибавим ко второму уравнению два раза первое уравнение и получим $3\ln x = (y-10)\ln x$, откуда либо $x=1$, либо $y=13$. В первом случае первое уравнение системы принимает вид $\ln y = -\ln 2$, откуда $y=\frac{1}{2}$. Во втором случае $\ln x + \ln 2 + \ln 13 = (13-5)\ln x$, откуда $x=\sqrt[7]{26}$.
Комментарий. Найдено только одно решение — 2 балла.
Получены лишние пары (x,y) — снять по 1 баллу за каждую пару.
Решения угаданы — баллы не добавляются.

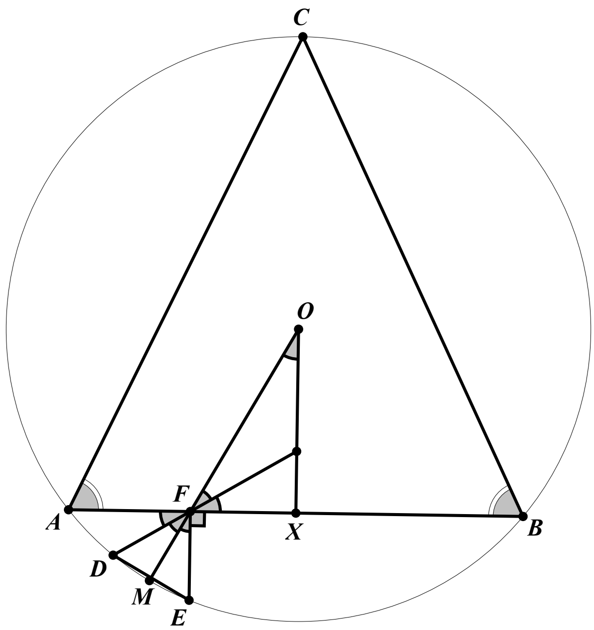
M11.3-5 Вася записал в тетрадь 6 целых чисел, каждое из которых отлично от нуля. После этого он дописал в тетрадь еще 6 чисел, которые получаются следующим образом: из квадрата каждого из 6 исходных чисел вычитается сумма 5 остальных исходных чисел. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться среди всех 12 чисел, записанных в тетради?

Ответ. 10.

Решение. Если все 6 исходных чисел отрицательны, то все 6 новых чисел будут положительными как разности между положительным числом (квадратом ненулевого числа) и суммой отрицательных чисел. В этом случае получится 6 отрицательных чисел.
Пусть среди 6 исходных чисел a, b, c, d, e, f есть положительное (для определённости — пусть число $a>0$). Рассмотрим 6 чисел: b, c, d, e, f, $a^2-(b+c+d+e+f)$. Их сумма равна a^2 и поэтому положительна. Поэтому среди этих 6 чисел должно быть по крайней мере еще одно положительное, отличное от числа a, а значит, отрицательных чисел не больше $12-2=10$.
Покажем, что среди 12 написанных Васей чисел могло быть 10 отрицательных. Подходит, например, следующий исходный набор чисел: $a=10$, $b=c=d=e=f=-1$. Тогда среди 6 дописанных чисел будут 5 отрицательных, равных (-5), и одно положительное число 105.
Комментарий. Доказано, что отрицательных чисел не больше 10 — 3 балла.
Приведён пример, когда отрицательных чисел ровно 10 — 2 балла.

M11.4-5 Равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$), в котором $\angle CAB = \arcsin\frac{3}{4}$, вписан в окружность с центром O. На дуге AB этой окружности, не содержащей вершину C, выбраны точки D и E, а на стороне AB — точка F так, что $DF = FE$ и $EF \perp AB$. Найдите отношение $DE : BC$, если прямая DF содержит биссектрису $\angle OFB$.

Ответ. $\dfrac{1}{12}\left(\sqrt{\dfrac{191}{3}} - 1\right)$.



Решение. Пусть OM — радиус, перпендикулярный DE. В равнобедренном треугольнике DFE прямая OM совпадает с серединным перпендикуляром к основанию DE, поэтому точка F лежит на отрезке OM. Поскольку $\angle DFM = \angle EFM = \angle AFD$, все три угла равны $\frac{\pi}{6}$, а треугольник DEF — равносторонний. Пусть X — середина AB, а $\angle CAB = \alpha$. Тогда $\angle ACB = \pi - 2\alpha$, а угол AOB — центральный, опирающийся на ту же дугу AB, откуда $\angle AOX = \pi - 2\alpha$. Тогда $OX = -R\cos 2\alpha$, а из прямоугольного треугольника OFX с острым углом FOX, равным $\frac{\pi}{6}$, $FX = -\frac{1}{\sqrt{3}}R\cos 2\alpha$. По теореме Пифагора $(OX+EF)^2 = OE^2 - FX^2$, откуда $(-R\cos 2\alpha + EF)^2 = R^2 - \frac{1}{3}R\cos^2 2\alpha$ и

$$DE = EF = R\left(\sqrt{1 - \frac{1}{3}\cos^2 2\alpha} + \cos 2\alpha\right) =$$

$$= BC \cdot \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{3}\cos^2 2\alpha} + \cos 2\alpha\right) = BC \cdot \frac{\sqrt{22} - 3}{4\sqrt{5}}.$$

Комментарий. Доказано, что треугольник DEF — равносторонний — 2 балла.
Получено квадратное уравнение для нахождения EF — 1 балл;
Ответ не доведён до числа — снять 1 балл.

M11.1-6 При каких значениях параметра t уравнение $(t^2-9)x^2+2\sqrt{t+3}\cdot x+4=0$ имеет хотя бы одно вещественное решение?

Ответ. $t \in \left(-3; \frac{13}{4}\right]$.

Решение. Для того, чтобы корень был определен, необходимо выполнение неравенства $t \geq -3$. При $t=3$ получаем уравнение $2\sqrt{6}\cdot x+4=0$, которое имеет решение.
При $t=-3$ левая часть уравнения тождественно равна 4, поэтому уравнение не имеет решений. Если же $t \neq \pm 3$, то уравнение является квадратным, а условие того, что оно имеет хотя бы один вещественный корень, есть неотрицательность его дискриминанта. Запишем это условие в виде $D_1=\frac{D}{4}\geq 0$: $D_1=t+3-4(t^2-9)\geq 0$. Отсюда $t\in\left[-3;\frac{13}{4}\right], t\neq\pm 3$.
Объединяя полученные решения, получаем ответ: $t \in \left(-3; \frac{13}{4}\right]$.
Комментарий. Разобран случай $t^2=9$ — 2 балла.
Разобран случай $t^2\neq 9$ — 3 балла.

M11.2-6 Найдите все пары положительных вещественных чисел x и y таких, что

$$\begin{cases} 3xy = x^{4y+1}, \\ x = 9y^2x^{-2y}. \end{cases}$$

Ответ. $(x,y)=\left(1,\frac{1}{3}\right)$ или $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{8}},\frac{1}{6}\right)$.

Решение. Логарифмируем оба уравнения системы:

$$\begin{cases} \ln 3+\ln x+\ln y=(4y+1)\ln x, \\ -2\ln 3+\ln x-2\ln y=-2y\ln x. \end{cases}$$

Прибавим ко второму уравнению два раза первое уравнение и получим $3\ln x=(6y+2)\ln x$, откуда либо $x=1$, либо $y=\frac{1}{6}$. В первом случае первое уравнение системы принимает вид $\ln y=-\ln 3$, откуда $y=\frac{1}{3}$. Во втором случае $\ln x+\ln 3-\ln 6=\left(\frac{2}{3}+1\right)\ln x$, откуда $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$.
Комментарий. Найдено только одно решение — 2 балла.
Получены лишние пары (x,y) — снять по 1 баллу за каждую пару.
Решения угаданы — баллы не добавляются.

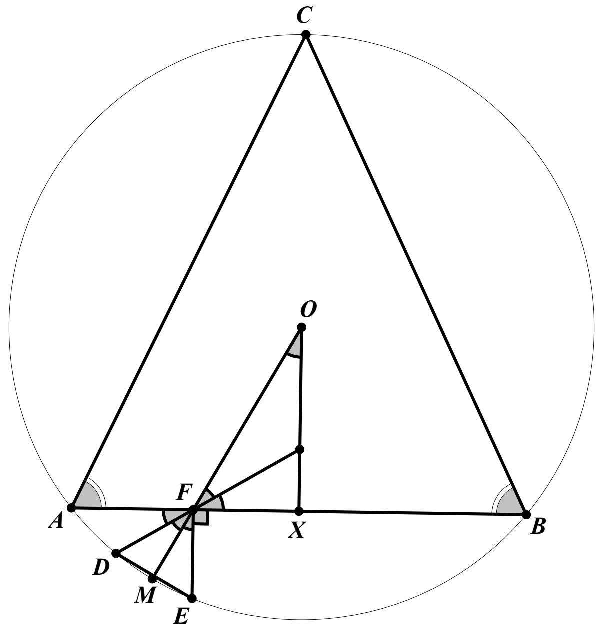
M11.3-6 Вася записал в тетрадь 7 целых чисел, каждое из которых отлично от нуля. После этого он дописал в тетрадь еще 7 чисел, которые получаются следующим образом: из квадрата каждого из 7 исходных чисел вычитается сумма 6 остальных исходных чисел. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться среди всех 14 чисел, записанных в тетради?

Ответ. 12.

Решение. Если все 7 исходных чисел отрицательны, то все 7 новых чисел будут положительными как разности между положительным числом (квадратом ненулевого числа) и суммой отрицательных чисел. В этом случае получится 7 отрицательных чисел.
Пусть среди 7 исходных чисел a, b, c, d, e, f, g есть положительное (для определённости — пусть число $a>0$). Рассмотрим 7 чисел: b, c, d, e, f, g, $a^2-(b+c+d+e+f+g)$. Их сумма равна a^2 и поэтому положительна. Поэтому среди этих 7 чисел должно быть по крайней мере еще одно положительное, отличное от числа a, а значит, отрицательных чисел не больше $14-2=12$.
Покажем, что среди 14 написанных Васей чисел могло быть 12 отрицательных. Подходит, например, следующий исходный набор чисел: $a=10$, $b=c=d=e=f=g=-1$. Тогда среди 7 дописанных чисел будут 6 отрицательных, равных (-4), и одно положительное число 106.
Комментарий. Доказано, что отрицательных чисел не больше 12 — 3 балла.
Приведён пример, когда отрицательных чисел ровно 12 — 2 балла.

M11.4-6 Равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$), в котором $\angle CAB = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$, вписан в окружность с центром O. На дуге AB этой окружности, не содержащей вершину C, выбраны точки D и E, а на стороне AB — точка F так, что $DF = FE$ и $EF \perp AB$. Найдите отношение $DE : BC$, если прямая DF содержит биссектрису $\angle OFB$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{22}-3}{4\sqrt{5}}$.



Решение. Пусть OM — радиус, перпендикулярный DE. В равнобедренном треугольнике DFE прямая OM совпадает с серединным перпендикуляром к основанию DE, поэтому точка F лежит на отрезке OM. Поскольку $\angle DFM = \angle EFM = \angle AFD$, все три угла равны $\frac{\pi}{6}$, а треугольник DEF — равносторонний. Пусть X — середина AB, а $\angle CAB = \alpha$. Тогда $\angle ACB = \pi - 2\alpha$, а угол AOB — центральный, опирающийся на ту же дугу AB, откуда $\angle AOX = \pi - 2\alpha$. Тогда $OX = -R\cos 2\alpha$, а из прямоугольного треугольника OFX с острым углом FOX, равным $\frac{\pi}{6}$, $FX = -\frac{1}{\sqrt{3}}R\cos 2\alpha$. По теореме Пифагора $(OX+EF)^2 = OE^2 - FX^2$, откуда $(-R\cos 2\alpha + EF)^2 = R^2 - \frac{1}{3}R\cos^2 2\alpha$ и

$$DE = EF = R\left(\sqrt{1-\frac{1}{3}\cos^2 2\alpha} + \cos 2\alpha\right) =$$

$$= BC \cdot \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\sqrt{1-\frac{1}{3}\cos^2 2\alpha} + \cos 2\alpha\right) = BC \cdot \frac{\sqrt{22}-3}{4\sqrt{5}}.$$

Комментарий. Доказано, что треугольник DEF — равносторонний — 2 балла.
Получено квадратное уравнение для нахождения EF — 1 балл;
Ответ не доведён до числа — снять 1 балл.