Научно-техническая олимпиада «Старт в науку» 2023-2024 уч. года
Физика
Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Черновики не проверяются.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 5.

Максимальное число баллов за олимпиаду по физике 20.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Во всех задачах верный ответ без обоснования оценивается в **0 баллов**.

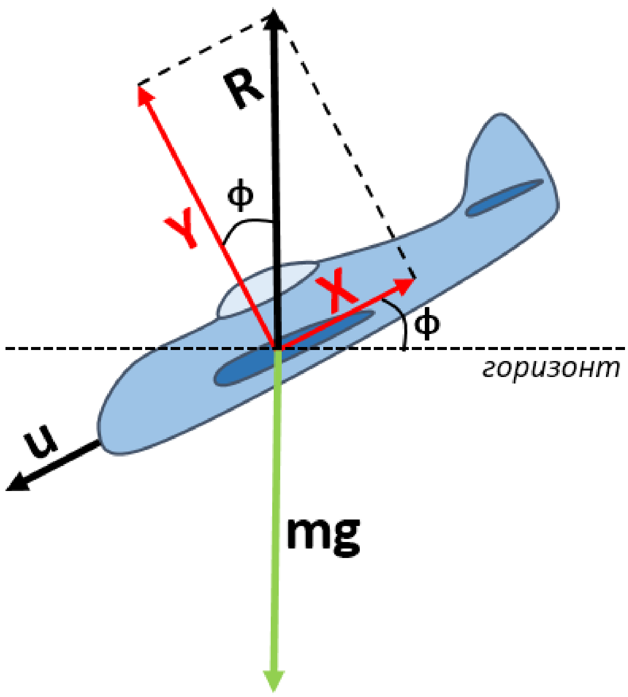
В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении. Баллы за отдельные продвижения суммируются.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается **1 балл**.

Ф9.1-1 Аэродинамическое качество крыла k определяется как отношение Y/X, где X – сила сопротивления воздуха (компонента полной аэродинамической силы R, направленная против скорости u крыла), а Y – подъёмная сила (компонента силы R, направленная перпендикулярно скорости u крыла). Аэродинамическое качество крыла не зависит от скорости движения и свойств воздуха. Планер с аэродинамическим качеством $k = 15$ столкнули с горы высотой $H = 1$ км. Считая, что движение планера быстро стабилизировалось, найдите, на каком расстоянии L от точки старта (вдоль поверхности земли) он приземлился?

Ответ. $L = 15$ км.

Решение.
Изобразим на рисунке силы, действующие на планер в процессе движения. При установившемся полёте аэродинамическая сила $\vec{R}$, действующая на крыло, компенсирует силу тяжести, а значит направлена строго вертикально. Угол ϕ между направлением вектора скорости $\vec{u}$ и горизонтом $\left(\mathrm{tg}(\phi) = \frac{H}{L}\right)$ равен углу между силой $\vec{X}$ и горизонтом так как $\vec{u}$ и $\vec{X}$ коллинеарны.



Не трудно установить, что в таком случае угол ϕ также образуют вектора $\vec{R}$ и $\vec{Y}$, откуда $\mathrm{tg}(\phi) = \frac{X}{Y} = \frac{1}{k}$, откуда $\frac{H}{L} = \frac{1}{k}$ и $L = kH = 15$ км.
Критерии оценивания.
Вывод о нулевой равнодействующей — 1 балл.
Вывод о вертикальности $\vec{R}$ — 1 балл.
Выражения для φ через X и Y и через H и L — по 1 баллу за каждое соотношение.
(Либо 2 балла за финальное соотношение из подобия треугольников)
Итоговое выражение и ответ — 1 балл.

Ф9.2-1 На криптофермах для охлаждения используют поток холодной воды, прокачиваемый через теплоотвод процессора. Оцените температуру воды, которая должна подаваться в систему охлаждения криптофермы, чтобы температура процессора не превышала 60°C при вычислениях с тактовой частотой 3 ГГц, если при прохождении через теплоотвод процессора вода практически не нагревается. Считайте что при одном такте работы процессора выделяется теплота

$q = 1.2 \cdot 10^{-12}$ Дж, а коэффициент теплоотдачи равен $\kappa = 30$ мкВт/см^2·°С. Площадь процессора равна $S = 4$ см^2.

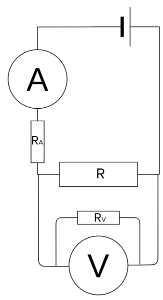
Ответ. 30°С.

Решение.
В стационарном случае весь тепловой поток от процессора будет уносить вода. За короткое время Δt процессор передаст системе охлаждения теплоту $Q = \kappa S(T_п - T_в)\Delta t$. С другой стороны за это же время Δt произойдёт $N = \nu \Delta t$ вычислительных операций и выделившаяся теплота составит $Q = \nu q \Delta t$. Отсюда, температура воды будет равна

$$T_в = T_п - \frac{\nu q}{\kappa S} = 30°\text{С}.$$

Критерии оценивания.
Записан закон Ньютона-Рихмана — 1 балл.
Записано уравнение теплового баланса — 1 балл.
Верное выражение для теплоты, выделяемой процессором — 1 балл.
Получено итоговое выражение — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф9.3-1 При измерении малых сопротивлений оказывается важным учёт сопротивления измерительных приборов. Для измерения сопротивления нихромовой проволоки R используется схема, представленная на рисунке, где $R_A = 5$ Ом и $R_V = 1$ кОм – эквивалентные сопротивления амперметра и вольтметра соответственно. Показания амперметра равны $I_A = 2,5$ мА, а вольтметра $U_V = 100$ мВ . Чему равно сопротивление нихромовой проволоки?



Ответ. $41,7$ Ом

Решение. Сумма токов через проволоку и вольтметр равна току через амперметр. Напряжение на проволоке равно напряжению на вольтметре. Ток через вольтметр будет равен $I_V = U_V/R_V$. Отсюда ток через нихромовую проволку будет равен $I = I_A - I_V = I_A - U_V/R_V$. Отсюда получим ответ $R = U_V/I = \frac{U_V}{I_A - U_V/R_V} = 41,7$ Ом.
Критерии оценивания.
Получен ток через вольтметр — 1 балл.
Получен ток через проволоку — 1 балл.
Записан закон Ома для проволоки — 1 балл.
Получено итоговое выражение — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф9.4-1 В компьютерном зрении для определения положения объекта он снимается двумя одинаковыми камерами, объективы которых настроены на фокусные расстояния $F_1 = 72$ мм и $F_2 = 74$ мм. Угол между главными оптическими осями камер равен 90°. Считайте, что камеры расположены на одинаковой высоте $H = 1,5$ м. Найдите высоту, на которой расположен объект, и расстояние до камер, если расстояние по вертикали от центра матрицы до изображения объекта $y_1 = 250$ пикселей на первой камере и $y_2 = 81$ пиксель на второй камере. Считайте что матрица квадратная, со стороной квадрата $a = 2$ см и содержит 10^6 квадратных пикселей, а расстояние от объектива до матрицы равно $d = 7,5$ см.

Ответ. $f_1 = 0,953$ м, $f_2 = 2,97$ м, $h = 1,3$ м.

Решение. Так как объективы настраиваются так, чтобы изображение изучаемого тела было сфокусировано на матрице, следовательно из формулы тонкой линзы можно найти расстояния до первой и второй камеры.

$$f_1 = \frac{F_1 d}{d - F_1} = 1,8 \text{ м}$$

$$f_2 = \frac{F_2 d}{d - F_2} = 5,55 \text{ м}$$

Изображение объекта действительное перевернутое. Тогда из подобия треугольников, получаемых при построении хода лучей:

$$h = H + f_1 l_1 / d = 1.62 \text{ м},$$

где $l_1 = a/2 \cdot y_1/500$ – координата изображения на матрице в абсолютных значениях длины.

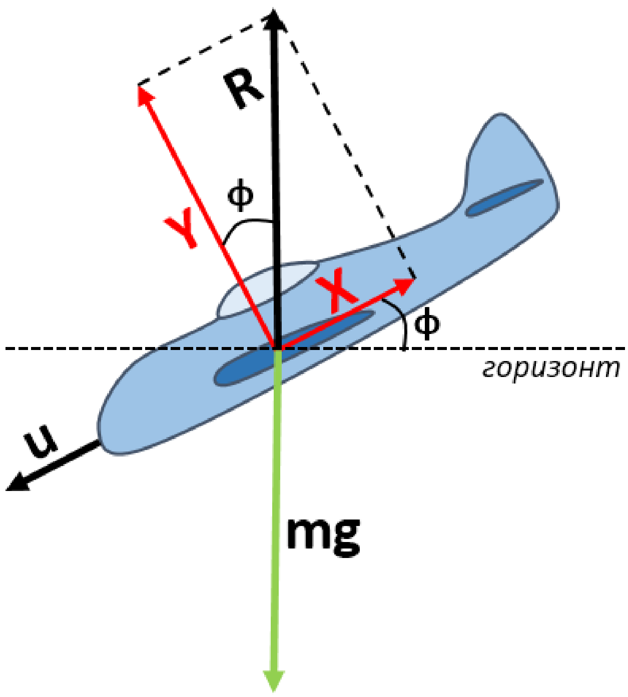
Критерии оценивания.

Проведены рассуждения о фокусировке объективов — 1 балл.
Записана формула тонкой линзы — 1 балл.
Получено значение для расстояний — 1 балл.
Получено выражение для высоты — 1 балл.
Получено значение для высоты — 1 балл.

Ф9.1-2 Аэродинамическое качество крыла k определяется как отношение Y/X, где X – сила сопротивления воздуха (компонента полной аэродинамической силы R, направленная против скорости u крыла), а Y – подъёмная сила (компонента силы R, направленная перпендикулярно скорости u крыла). Аэродинамическое качество крыла не зависит от скорости движения и свойств воздуха. Планер с аэродинамическим качеством $k = 13$ столкнули с горы высотой $H = 2$ км. Считая, что движение планера быстро стабилизировалось, найдите, на каком расстоянии L от точки старта (вдоль поверхности Земли) он приземлился?

Ответ. $L = 26$ км.

Решение.
Изобразим на рисунке все силы, действующие на планер в процессе движения. При установившемся полёте аэродинамическая сила $\vec{R}$, действующая на крыло, компенсирует силу тяжести, а значит направлена строго вертикально. Угол ϕ между направлением вектора скорости $\vec{u}$ и горизонтом $\left(\mathrm{tg}(\phi) = \frac{H}{L}\right)$ равен углу между силой $\vec{X}$ и горизонтом так как $\vec{u}$ и $\vec{X}$ коллинеарны.



Не трудно установить, что в таком случае угол ϕ также образуют вектора $\vec{R}$ и $\vec{Y}$, откуда $\mathrm{tg}(\phi) = \frac{X}{Y} = \frac{1}{k}$, откуда $\frac{H}{L} = \frac{1}{k}$ и $L = kH = 26$ км.

Критерии оценивания.
Вывод о нулевой равнодействующей — 1 балл.
Вывод о вертикальности $\vec{R}$ — 1 балл.
Выражения для φ через X и Y и через H и L — по 1 баллу за каждое соотношение.
(Либо 2 балла за финальное соотношение из подобия треугольников)
Итоговое выражение и ответ — 1 балл.

Ф9.2-2 На криптофермах для охлаждения используют поток холодной воды, прокачиваемый через теплоотвод процессора. Оцените какой температуры должна подаваться вода в систему охлаждения криптофермы, чтобы температура процессора не превышала 60°C при вычислениях с тактовой частотой 4,5 ГГц, если при прохождении через теплоотвод процессора вода практически не нагревается. Считайте что при одном такте работы процессора выделяется теплота $q = 1,2 \cdot 10^{-12}$ Дж, а коэффициент теплоотдачи равен $\kappa = 30$ мкВт/см^2·°C. Площадь процессора равна $S = 6$ см^2.

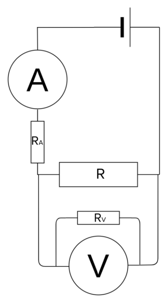
Ответ. 20°C

Решение. В стационарном случае весь тепловой поток от процессора будет уносить вода. За короткое время Δt процессор передаст системе охлаждения теплоту $Q = \kappa S(T_{\text{п.}} - T_{\text{в.}})\Delta t$. С другой стороны за это же время Δt произойдёт $N = \nu \Delta t$ вычислительных операций и выделившаяся теплота составит $Q = \nu q \Delta t$. Отсюда, температура воды будет равна

$$T_{\text{в.}} = T_{\text{п.}} - \frac{\nu q}{\kappa S} = 20°\text{C}.$$

Критерии оценивания.
Записан закон Ньютона-Рихмана теплоотдачи — 1 балл.
Записано уравнение теплового баланса — 1 балл.
Получено выражение тепла, выделяемого процессором — 1 балл.
Получено итоговое выражение — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф9.3-2 При измерении малых сопротивлений оказывается важным учёт сопротивления измерительных приборов. Для измерения сопротивления нихромовой проволоки R используется схема, представленная на рисунке, где $R_A = 0,3$ Ом и $R_V = 2$ кОм – эквивалентные сопротивления амперметра и вольтметра соответственно. Показания амперметра равны $I_A = 3,5$ мА, а вольтметра $U_V = 150$ мВ . Чему равно сопротивление нихромовой проволоки?



Ответ. 44, 78 Ом.

Решение. Сумма токов через проволоку и вольтметр равна току через амперметр. Напряжение на проволоке равно напряжению на вольтметре. Ток через вольтметр будет равен $I_V = U_V/R_V$. Отсюда ток через нихромовую проволку будет равен $I = I_A - I_V = I_A - U_V/R_V$. Отсюда получим ответ $R = U_V/I = \frac{U_V}{I_A - U_V/R_V} = 44,78$ Ом.
Критерии оценивания.
Получен ток через вольтметр — 1 балл.
Получен ток через проволоку — 1 балл.
Записан закон Ома для проволоки — 1 балл.
Получено итоговое выражение — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф9.4-2 В компьютерном зрении для определения положения объекта он снимается двумя одинаковыми камерами, чьи объективы настроены на фокусные расстояния $F_1 = 52$ мм и $F_2 = 54$ мм. Угол между главными оптическими осями камер равен 90°. Считайте, что камеры расположены на одинаковой высоте $H = 1$ м. Найдите высоту, на которой расположен объект, и расстояние до камер, если расстояние по вертикали от центра матрицы до изображения объекта $y_1 = 450$ пикселей на первой камере и $y_2 = 145$ пикселей на второй камере. Считайте что матрица квадратная, со стороной $a = 4$ см и содержит 10^6 квадратных пикселей, а расстояние от объектива до матрицы равно $d = 5,5$ см.

Ответ. $f_1 = 0,953$ м, $f_2 = 2,97$ м, $h = 1,3$ м.

Решение. Так как объективы настраиваются так, чтобы изображение изучаемого тела было сфокусировано на матрице, следовательно, из формулы тонкой линзы можно найти расстояния до первой и второй камеры.

$$f_1 = \frac{F_1 d}{d - F_1} = 0,953 \text{ м}$$

$$f_2 = \frac{F_2 d}{d - F_2} = 2,97 \text{ м}$$

Изображение объекта действительное перевернутое. Тогда из подобия треугольников, получаемых при построении хода лучей:

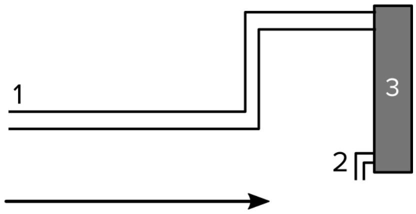
$$h = H + f_1 l_1 / d = 1,3 \text{ м}.$$

где $l_1 = a/2 \cdot x_1/500$ – координата изображения на матрице в абсолютных значениях длины.

Критерии оценивания.

Проведены рассуждения о фокусировке объективов — 1 балл.
Записана формула тонкой линзы — 1 балл.
Получено значение для расстояний — 1 балл.
Получено выражение для высоты — 1 балл.
Получено значение для высоты — 1 балл.

Ф10.1-1 Самодельный датчик скорости для планера состоит из изогнутой трубки Пито (1), одна часть которой направлена вдоль потока, изображенного стрелкой, и трубки, выход которой направлен перпендикулярно потоку (2). Конец второй трубки подключен к измерителю давления (3) на расстоянии $h = 50$ см ниже первой трубки. Измеритель давления измеряет разность давлений между трубкой Пито и трубкой, открытой в атмосферу. Планер совершает манёвр «мёртвая петля» радиусом $R = 10$ м со скоростью $v = 40$ м/с. Какую скорость покажет датчик скорости, калиброванный для обычного полёта в верхней точки мёртвой петли?



Ответ. $28,1$ м/с.

Решение.
В спокойном полёте датчик измеряет разницу давления между атмосферой и набегающим потоком, которую из уравнения Бернулли можно записать как

$$\Delta P' = \frac{\rho v'^2}{2} + \rho g h,$$

где ρ – плотность воздуха, а g – ускорение свободного падения.
В случае же совершения мёртвой петли самолёт обладает центростремительным ускорением $a = v^2/R$. В соответствии с принципом эквивалентности гравитационных и инерционных сил, получим что измерена будет разница давлений равна

$$\Delta P = \frac{\rho v^2}{2} + \rho \left(\frac{v^2}{R} - g \right) h.$$

Приравнивая разницы давлений для спокойного полёта и мёртвой петли и, выражая скорость, найдём показания прибора.

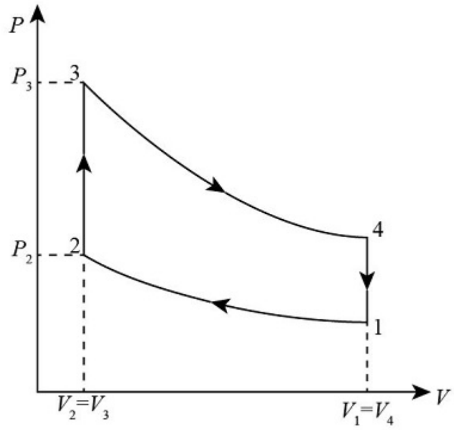
$$v' = \sqrt{\frac{v^2}{2} + \left(\frac{v^2}{R} - 2g \right) h}.$$

С учётом того, что $h/R << 1/2$, получим

$$v' = \sqrt{\frac{v^2}{2} - 2gh} = 28,1 \text{ м/с}.$$

Критерии оценивания.
Записан закон Бернулли для нормального полёта — 1 балл.
Записан закон Бернулли для мёртвой петли — 2 балла.
Получено выражение для скорости полёта — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф10.2-1 Один из ранних двигателей внутреннего сгорания основан на цикле Отто (на рисунке), состоящем из изохорного нагревания, адиабатического расширения, изохорного охлаждения и адиабатического сжатия. Конструкторы сделали двигатель со степенью сжатия, отношением наибольшего и наименьшего объемов в цикле, $\alpha = 9,5$ и мощностью $W = 136$ л.с. Какой расход 95го бензина Q, литров в час, будет у такого двигателя? Считайте что в течении одного такта работы двигателя количество рабочего вещества примерно постоянно, а отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объеме $\gamma = C_P/C_V \approx 1,4$ для рабочего вещества. *1 л.с. равна 0,736 кВт. Удельная теплота сгорания 95-го бензина равна $\lambda = 33,5$ МДж/л*



Ответ. $Q = 18$ л/ч.

Решение. Поскольку мы знаем величину полезной мощности, то мощность, получаемая от сжигания бензина можно выразить как $W_{\text{бенз.}} = \lambda Q = W/\eta$. Осталось найти КПД цикла Отто. Количество подводимой теплоты при изохорном нагревании равно $Q_{2-3} = \frac{i}{2}R(T_3 - T_2)$. Количество отводимой теплоты при изохорном охлаждении равно $Q_{4-1} = \frac{i}{2}R(T_1 - T_4)$. Отсюда получим, что КПД будет равен

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{1-4}|}{|Q_{2-3}|} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1} \cdot \frac{T_1}{T_2}.$$

Так как для адиабаты справедливо, что $PV^\gamma = const$, то $TV^{\gamma-1} = const$. Отсюда можно получить, что $T_4/T_1 = T_3/T_2$. Отношение $T_1/T_2 = (V_2/V_1)^{\gamma-1} = (1/\alpha)^{\gamma-1}$. Поэтому, КПД равен:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$$

Получим ответ $Q = \left(1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}\right)^{-1} \frac{W}{\lambda} = 18$ л/ч.
Критерии оценивания.
Записано выражение для КПД через отношение мощностей — 1 балл.
Получено выражение для КПД через отношение температур — 1 балла.
Получено выражение для КПД через степень сжатия — 1 балла.
Получено итоговое выражение для расхода — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф10.3-1 В компьютерном зрении для определения положения объекта он снимается двумя одинаковыми камерами, чьи объективы настроены на фокусные расстояния $F_1 = 62$ мм и $F_2 = 64$ мм. Угол между главными оптическими осями камер равен $90°$. Считайте, что камеры расположены на одинаковой высоте $H = 1$ м. Найдите высоту, на которой расположен объект, и расстояние до камер, если расстояние по вертикали от центра матрицы до изображения объекта $y_1 = 450$ пикселей на первой камере и $y_2 = 145$ пикселей на второй камере. Считайте что матрица квадратная, со стороной $a = 4$ см и содержит 10^6 квадратных пикселей, а расстояние от объектива до матрицы равно $d = 6,5$ см.

Ответ. $f_1 = 1,34$ м, $f_2 = 4,16$ м, $h = 1,37$ м.

Решение. Так как объективы настраиваются так, чтобы изображение изучаемого тела было сфокусировано на матрице, следовательно, из формулы тонкой линзы можно найти расстояния до первой и второй камеры.

$$f_1 = \frac{F_1 d}{d - F_1} = 1,34 \text{ м}$$

$$f_2 = \frac{F_2 d}{d - F_2} = 4,16 \text{ м}$$

Изображение объекта действительное перевернутое. Тогда из подобия треугольников, получаемых при построении хода лучей:

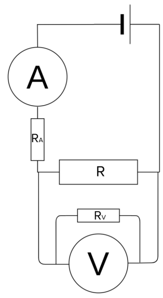
$$h = H + f_1 l_1 / d = 1,37 \text{ м}.$$

где $l_1 = a/2 \cdot x_1/500$ – координата изображения на матрице в абсолютных значениях длины.

Критерии оценивания.

Проведены рассуждения о фокусировке объективов — 1 балл.
Записана формула тонкой линзы — 1 балл.
Получено значение для расстояний — 1 балл.
Получено выражение для высоты — 1 балл.
Получено значение для высоты — 1 балл.

Ф10.4-1 При измерении малых сопротивлений оказывается важным учёт сопротивления измерительных приборов. Для измерения сопротивления нихромовой проволоки R используется схема, представленная на рисунке, где $R_A = 0,8$ Ом и $R_V = 1,5$ кОм – эквивалентные сопротивления амперметра и вольтметра соответственно. Показания амперметра равны $I_A = 2,5$ мА, а вольтметра $U_V = 200$ мВ . Чему равно сопротивление нихромовой проволоки?



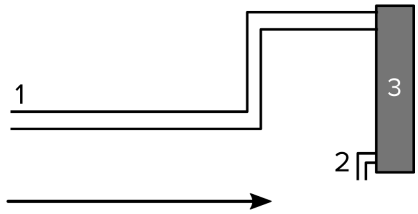
Ответ. 84,5 Ом.

Решение. Сумма токов через проволоку и вольтметр равна току через амперметр. Напряжение на проволоке равно напряжению на вольтметре. Тогда ток через вольтметр будет равен $I_V = U_V/R_V$. Отсюда ток через нихромовую проволоку будет равен $I = I_A - I_V = I_A - U_V/R_V$. Отсюда получим ответ $R = U_V/I = \frac{U_V}{I_A - U_V/R_V} = 84,5$ Ом.

Критерии оценивания.

Получен ток через вольтметр — 1 балл.
Получен ток через проволоку — 1 балл.
Записан закон Ома для проволоки — 1 балл.
Получено итоговое выражение — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф10.1-2 Самодельный датчик скорости для планера состоит из изогнутой трубки Пито (1), одна часть которой направлена вдоль потока, изображенного стрелкой, и трубки, выход которой направлен перпендикулярно потоку (2). Конец второй трубки подключен к измерителю давления (3) на расстоянии $h = 25$ см ниже первой трубки. Измеритель давления измеряет разность давлений между трубкой Пито и трубкой, открытой в атмосферу. Планер совершает манёвр «мёртвая петля» радиусом $R = 10$ м со скоростью $v = 25$ м/с. Какую скорость покажет датчик скорости, калиброванный для обычного полёта в верхней точки мёртвой петли?



Ответ. $17,54$ м/с.

Решение.
В спокойном полёте датчик измеряет разницу давления между атмосферой и набегающим потоком, которую из уравнения Бернулли можно записать как

$$\Delta P' = \frac{\rho v'^2}{2} + \rho g h,$$

где ρ – плотность воздуха, а g – ускорение свободного падения.
В случае же совершения мёртвой петли самолёт обладает центростремительным ускорением $a = v^2/R$. В соответствии с принципом эквивалентности гравитационных и инерционных сил, получим что измерена будет разница давлений равна

$$\Delta P = \frac{\rho v^2}{2} + \rho \left(\frac{v^2}{R} - g \right) h.$$

Приравнивая разницы давлений для спокойного полёта и мёртвой петли и, выражая скорость, найдём показания прибора.

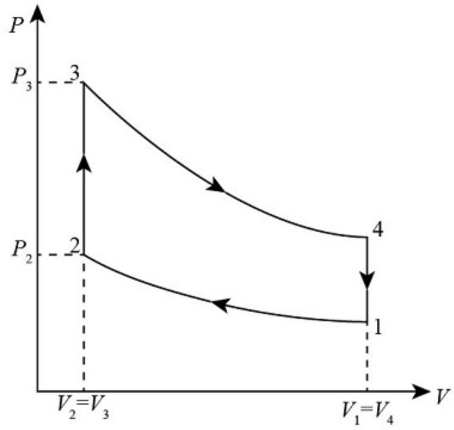
$$v' = \sqrt{\frac{v^2}{2} + \left(\frac{v^2}{R} - 2g \right) h}.$$

С учётом того, что $h/R << 1/2$, получим

$$v' = \sqrt{\frac{v^2}{2} - 2gh} = 17,54 \text{ м/с}.$$

Критерии оценивания.
Записан закон Бернулли для нормального полёта — 1 балл.
Записан закон Бернулли для мёртвой петли — 2 балла.
Получено выражение для скорости полёта — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф10.2-2 Один из ранних двигателей внутреннего сгорания основан на цикле Отто (на рисунке), состоящем из изохорного нагревания, адиабатического расширения, изохорного охлаждения и адиабатического сжатия. Конструкторы сделали двигатель со степенью сжатия, отношением наибольшего и наименьшего объемов в цикле, $\alpha = 8$ и мощностью $W = 272$ л.с. Какой расход 95го бензина Q, литров в час, будет у такого двигателя? Считайте что в течении одного такта работы двигателя количество рабочего вещества примерно постоянно, а отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объеме $\gamma = C_P/C_V \approx 1,4$ для рабочего вещества. *1 л.с. равна 0,736 кВт. Удельная теплота сгорания 95-го бензина равна* $\lambda = 33,5$ *МДж/л*



Ответ. $Q = 37,5$ л/ч.

Решение. Поскольку мы знаем величину полезной мощности, то мощность, получаемая от сжигания бензина можно выразить как $W_{\text{бенз.}} = \lambda Q = W/\eta$. Осталось выразить КПД цикла Отто. Количество подводимой теплоты при изохорном нагреве равно $Q_{2-3} = \frac{i}{2}R(T_3 - T_2)$. Количество отводимой теплоты при изохорном охлаждении равно $Q_{4-1} = \frac{i}{2}R(T_1 - T_4)$. Отсюда получим, что КПД будет равен

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{1-4}|}{|Q_{2-3}|} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1} \cdot \frac{T_1}{T_2}.$$

Так как для адиабаты справедливо, что $PV^\gamma = const$, следовательно $TV^{\gamma-1} = const$. Отсюда можно получить, что $T_4/T_1 = T_3/T_2$. Отношение $T_1/T_2 = (V_2/V_1)^{\gamma-1} = (1/\alpha)^{\gamma-1}$. Поэтому, КПД равен:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$$

Получим ответ $Q = \left(1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}\right)^{-1} \frac{W}{\lambda} = 37,5$ л/ч.

Критерии оценивания.

Записано выражение для КПД через отношение мощностей — 1 балл.

Получено выражение для КПД через отношение температур — 1 балла.

Получено выражение для КПД через степень сжатия — 1 балла.

Получено итоговое выражение для расхода — 1 балл.

Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф10.3-2 В компьютерном зрении для определения положения объекта он снимается двумя одинаковыми камерами, чьи объективы настроены на фокусные расстояния $F_1 = 42$ мм и $F_2 = 43$ мм. Угол между главными оптическими осями камер равен 90°. Считайте, что камеры расположены на одинаковой высоте $H = 0,5$ м. Найдите высоту, на которой расположен объект, и расстояние до камер, если расстояние по вертикали от центра матрицы до изображения объекта $y_1 = 350$ пикселей на первой камере и $y_2 = 227$ пикселей на второй камере. Считайте что матрица квадратная, со стороной $a = 2$ см и содержит 10^6 квадратных пикселей, а расстояние от объектива до матрицы равно $d = 4,5$ см.

Ответ. $f_1 = 0,63$ м, $f_2 = 0,97$ м, $h = 0,73$ м.

Решение. Так как объективы настраиваются так, чтобы изображение изучаемого тела было сфокусировано на матрице, следовательно, из формулы тонкой линзы можно найти расстояния до первой и второй камеры.

$$f_1 = \frac{F_1 d}{d - F_1} = 0,63 \text{ м}$$

$$f_2 = \frac{F_2 d}{d - F_2} = 0,97 \text{ м}$$

Изображение объекта действительное перевернутое. Тогда из подобия треугольников, получаемых при построении хода лучей:

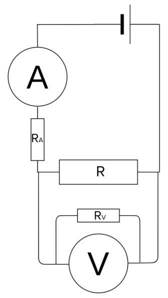
$$h = H + f_1 l_1 / d = 0,73 \text{ м}.$$

где $l_1 = a/2 \cdot x_1/500$ – координата изображения на матрице в абсолютных значениях длины.

Критерии оценивания.

Проведены рассуждения о фокусировке объективов — 1 балл.
Записана формула тонкой линзы — 1 балл.
Получено значение для расстояний — 1 балл.
Получено выражение для высоты — 1 балл.
Получено значение для высоты — 1 балл.

Ф10.4-2 При измерении малых сопротивлений оказывается важным учёт сопротивления измерительных приборов. Для измерения сопротивления нихромовой проволоки R используется схема, представленная на рисунке, где $R_A = 0,1$ Ом и $R_V = 3$ кОм – эквивалентные сопротивления амперметра и вольтметра соответственно. Показания амперметра равны $I_A = 2$ мА, а вольтметра $U_V = 300$ мВ . Чему равно сопротивление нихромовой проволоки?



Ответ. $157,9$ Ом.

Решение. Сумма токов через проволоку и вольтметр равна току через амперметр. Напряжение на проволоке равно напряжению на вольтметре. Тогда ток через вольтметр будет равен $I_V = U_V/R_V$. Отсюда ток через нихромовую проволоку будет равен $I = I_A - I_V = I_A - U_V/R_V$. Отсюда получим ответ $R = U_V/I = \frac{U_V}{I_A - U_V/R_V} = 157,9$ Ом.

Критерии оценивания.

Получен ток через вольтметр — 1 балл.
Получен ток через проволоку — 1 балл.
Записан закон Ома для проволоки — 1 балл.
Получено итоговое выражение — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф11.1-1 Современные машины Формулы 1 имеют днище в форме тоннеля Вентури, нижняя часть которого образована полотном гоночной трассы. Схематично тоннель Вентури в разрезе представлен на рисунке, поток воздуха обозначен стрелкой. Оцените прижимную силу, действующую на машину Формулы 1, едущую по прямой со скоростью 80 м/с. Высота от верхней точки днища до асфальта на машине $a = 40$ см, а перепад высот на днище равен $h = 20$ см. Площадь низкой части тоннеля Венутри считайте равной $S = 1,5$ м^2, изменение ширины пренебрежимо малым, а тоннель Вентури изолированным от боковых потоков воздуха за счёт аэродинамики. Плотность воздуха примите равной $1,2$ кг/м^3

Ответ. $F = 7680$ Н.

Решение. Считая воздух несжимаемым, запишем уравнение Бернулли и закон сохранения массы

$$\Delta P = \rho/2(v'^2 - v^2)$$

$$val = v'(a-h)l,$$

где a – высота верхней точки днища до поверхности трассы. Тогда, получим, что

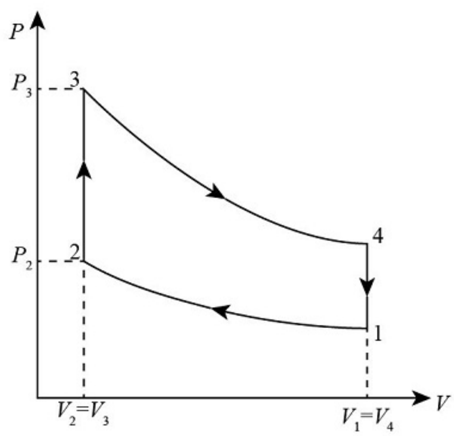
$$\Delta P = \frac{\rho}{2} v^2 \left((1 - h/a)^{-2} - 1\right)$$

Прижимная сила для машины будет равна

$$F = \Delta P S = \frac{\rho v^2 S}{2} \left((1 - h/a)^{-2} - 1\right) = 7680 \text{ Н}.$$

Критерии оценивания.
Записан закон Бернулли для воздуха под днищем и получен перепад давления — 1 балл.
Записан закон сохранения массы для воздуха под днищем — 1 балла.
Получено выражение для давления в тоннеле Вентури — 1 балл.
Получено выражение для прижимной силы, действующей на болид — 1 балл.
Получен верный ответ — 1 балл.

Ф11.2-1 Один из ранних двигателей внутреннего сгорания основан на цикле Отто (на рисунке), состоящем из изохорного нагревания, адиабатического расширения, изохорного охлаждения и адиабатического сжатия. Конструкторы сделали двигатель со степенью сжатия, отношением наибольшего и наименьшего объемов в цикле, $\alpha = 10,5$ и мощностью $W = 204$ л.с. Какой расход 95го бензина Q, литров в час, будет у такого двигателя? Считайте что в течении одного такта работы двигателя количество рабочего вещества примерно постоянно, а отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объеме $\gamma = C_P/C_V \approx 1,4$ для рабочего вещества. *1 л.с. равна 0,736 кВт. Удельная теплота сгорания 95-го бензина равна $\lambda = 33,5$ МДж/л*



Ответ. $27,2$ л/ч.

Решение. Поскольку мы знаем величину полезной мощности, то мощность, получаемая от сжигания бензина можно выразить как $W_{\text{бенз.}} = \lambda Q = W/\eta$. Осталось выразить КПД цикла Отто. Количество подводимой теплоты при изохорном нагреве равно $Q_{2-3} = \frac{i}{2}R(T_3 - T_2)$. Количество отводимой теплоты при изохорном охлаждении равно $Q_{4-1} = \frac{i}{2}R(T_1 - T_4)$. Отсюда получим, что КПД будет равен

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{1-4}|}{|Q_{2-3}|} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1} \cdot \frac{T_1}{T_2}.$$

Так как для адиабаты справедливо, что $PV^\gamma = const$, то $TV^{\gamma-1} = const$. Отсюда можно получить, что $T_4/T_1 = T_3/T_2$. Отношение $T_1/T_2 = (V_2/V_1)^{\gamma-1} = (1/\alpha)^{\gamma-1}$. Поэтому, КПД равен:

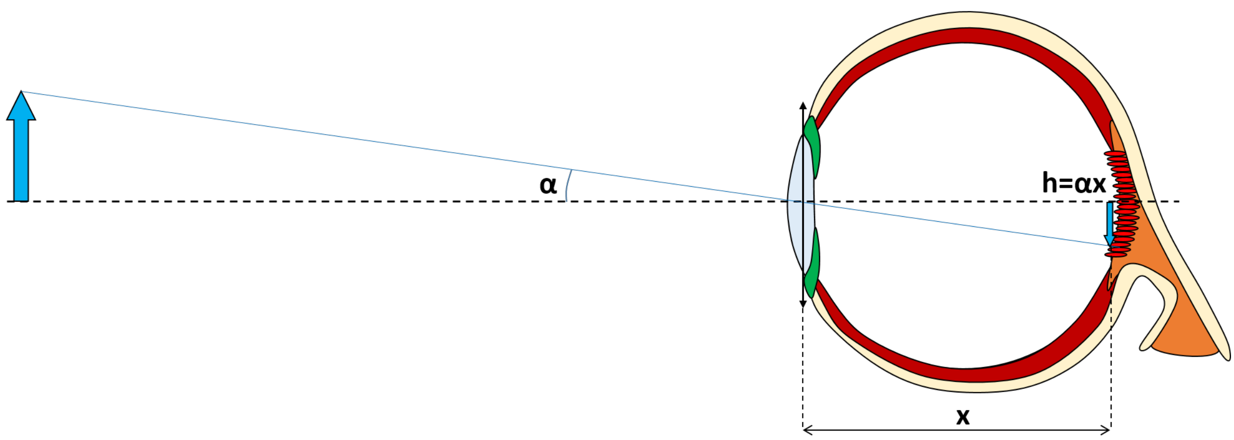
$$\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$$

Получим ответ $Q = \left(1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}\right)^{-1} \frac{W}{\lambda} = 27,2$ л/ч.
Критерии оценивания.
Записано выражение для КПД через отношение мощностей — 1 балл.
Получено выражение для КПД через отношение температур — 1 балла.
Получено выражение для КПД через степень сжатия — 1 балла.
Получено итоговое выражение для расхода — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

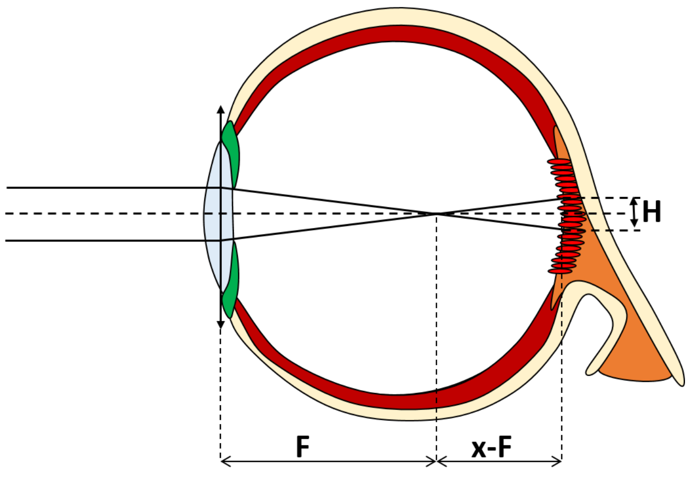
Ф11.3-1 Известно, что диаметр человеческого зрачка днём составляет около $d = 4$ мм. Определите разрешающую способность при наблюдении далёких объектов невооружённым близоруким глазом с дефектом зрения $\Delta = -2$ дптр. Дифракцией можно пренебречь.
Примечание: дефект зрения для близорукого глаза равен оптической силе линзы, которую необходимо использовать человеку для фокусировки на далёких объектах.

Ответ. $0,46°$

Решение. Разрешающая способность глаза - это минимальный угол между направлениями на два точечных источника, необходимый для того, чтобы человек смог распознать их как две отдельные точки (далее для угла между направлениями на источники будет использоваться термин «угловое расстояние»).
Пусть x - расстояние от хрусталика (собирающей линзы глаза) до сетчатки, на которой строится изображение. Ввиду малости углов, с которыми нам предстоит работать, можем считать, что двум источникам на угловом расстоянии a будет соответствовать пара изображений на сетчатке на линейном расстоянии $a \cdot x$ друг от друга (чтобы понять это, достаточно проследить ход лучей, прошедших через центр хрусталика без преломления).



При неточной фокусировке хрусталика точечные источники света создают на сетчатке не точечные изображения, а светлые пятна размером H. При этом если угловое расстояние a между двумя источниками таково, что $a \cdot x < H$, пятна от них сливаются и человеку становится трудно разрешить эти источники. Таким образом, разрешение глаза будет равно $a_{min} = \frac{H}{x}$.



Займёмся поиском H. При наблюдении далёких источников света глаз принимает параллельные пучки лучей. Для их фокусировки на сетчатке должно выполняться условие $F_0 = x$ или $D_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{1}{x}$, но близорукому человеку для этого приходится использовать линзу с оптической силой Δ, т.е. для реальной оптической силы D его максимально расслабленного хрусталика верно соотношение $D_0 = D + \Delta$ или $D = D_0 - \Delta = \frac{1}{x} - \Delta$. Или, наконец:

$$F = \frac{1}{\frac{1}{x} - \Delta} = \frac{x}{1 - x \cdot \Delta}$$

Рассмотрим ход крайних лучей пучка, попадающих в зрачок. Они приходят в сетчатку на расстоянии H друг от друга. В силу подобия можем записать:

$$\frac{H}{d} = \frac{x - F}{F} = \frac{x}{F} - 1 = (1 - x \cdot \Delta) - 1 = -x \cdot \Delta \Rightarrow H = -x \cdot \Delta \cdot d$$

Наконец, разрешающая способность:

$$a_{min} = \frac{H}{x} = \frac{-x \cdot \Delta \cdot d}{x} = -\Delta \cdot d = 0,008 \text{ радиан} \approx 0,46^\circ$$

Это примерно в 28 раз хуже, чем стандартное разрешение человеческого глаза (1’). Прямая пропорциональность между конечным результатом и d объясняет, почему при фокусировке помогают диафрагмы в виде небольшого (до 1 мм) отверстия в непрозрачном материале или прищур.

Критерии оценивания.

Связь между угловым смещением объекта и его положением на сетчатке — 1 балл.

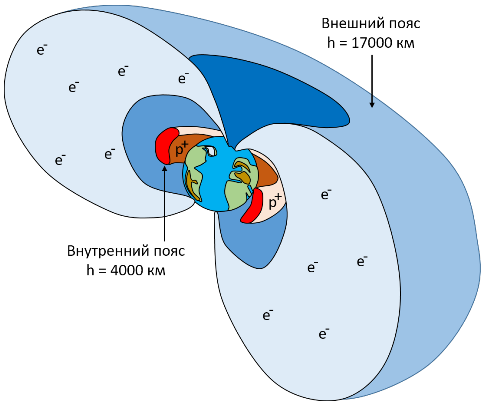
Условие разрешимости пары источников — 1 балл.

Выражение для фокусного расстояния глаза — 1 балл.

Выражение размеров пятна от точечного источника на сетчатке — 1 балл.

Итоговое выражение и ответ — 1 балл.

Ф11.4-1 Радиационные пояса Аллена - два пояса заряженных частиц, которые удерживаются от падения на Землю действием магнитного поля. Внутренний пояс состоит в основном из протонов и находится на высоте $h_1 = 4000$ км над поверхностью Земли, а внешний расположился на высоте $h_2 = 17000$ км и содержит в основном электроны. Оцените среднюю скорость дрейфа по долготе (на восток или на запад - выберите верное направление) для частиц внутреннего пояса Аллена вблизи плоскости экватора. Радиус Земли равен $r_0 = 6400$ км; индукция земного магнитного поля направлена вдоль поверхности, составляет $B_0 = 50$ мкТл на нулевой высоте и убывает как куб расстояния до центра планеты. Электростатическим взаимодействием между частицами можно пренебречь.



Ответ. 3,3 мм/с на восток.

Решение.
В дальнейшем решении будет присутствовать индекс i, равный 1 для внутреннего пояса (протонов) и 2 для внешнего пояса (электронов). Выразим основные величины, задающие движение в поясах:

Радиус i-го пояса:

$$r_i = r_0 + h_i;$$

Гравитационное ускорение частиц (g_0 - ускорение свободного падения на поверхности Земли):

$$g_i = \left(\frac{r_0}{r_i}\right)^2 g_0;$$

Индукция магнитного поля:

$$B_i = \left(\frac{r_0}{r_i}\right)^3 B_0;$$

На заряженную частицу массой m_i и зарядом e_i, движущуюся со скоростью $\vec{v_i}$ перпендикулярно линиям магнитного поля в плоскости экватора, действует сила тяжести $m_i\vec{g_i}$ и сила Лоренца $e_i \cdot \vec{v_i} \times \vec{B_i}$. Скорость $\vec{v_i}$ можно представить как $\vec{u_i} + \Delta\vec{v_i}$, где $\vec{u_i}$ - скорость движения, при которой сила Лоренца компенсирует силу тяжести: $e_i \cdot \vec{u_i} \times \vec{B_i} = -m_i\vec{g_i}$. Тогда суммарная сила, действующая на частицу равна:

$$m_i\vec{g_i} + e_i \cdot (\vec{u_i} + \Delta\vec{v_i}) \times \vec{B_i} = m_i\vec{g_i} + e_i \cdot \vec{u_i} \times \vec{B_i} + e_i \cdot \Delta\vec{v_i} \times \vec{B_i} = e_i \cdot \Delta\vec{v_i} \times \vec{B_i}$$

Получившаяся сила всегда лежит в плоскости экватора и перпендикулярна $\Delta\vec{v_i}$, т.е. движение частицы можно представить как вращение со скоростью $|\Delta\vec{v_i}|$ по окружности вокруг центра, который сам дрейфует в плоскости экватора со скоростью $\vec{u_i}$. На достаточно длительных временных интервалах средняя скорость кругового движения стремится к нулю и нас не интересует, поэтому задача сводится к поиску $\vec{u_i}$:

$$|e_i \cdot \vec{u_i} \times \vec{B_i}| = |-m_i\vec{g_i}| \Rightarrow e^+ u_i B_i = m_i g_i \Rightarrow u_i = \frac{m_i g_i}{e^+ B_i} = \frac{m_i g_0}{e^+ B_0} \cdot \frac{r_i}{r_0} = \frac{m_i g_0}{e^+ B_0} \cdot (1 + \frac{h_i}{r_0})$$

Подставляя численные значения, получим для пояса протонов: $u_1 = 3,3$мм/с;
и для пояса электронов: $u_2 = 4,1$мкм/с.

Линии индукции магнитного поля Земли направлены с юга на север (магнитные полушария противоположны географическим). Следовательно, чтобы ощутить действие силы Лоренца, противонаправленной силе тяжести, положительные заряды (протоны) должны дрейфовать на восток, а отрицательные (электроны) - на запад.

Отдельно отметим, что итоговые скорости на порядки меньше характерных скоростей на околоземных орбитах (единицы км/с), что позволяет нам не учитывать вклад кривизны траектории и связанных с ней ускорений.

Критерии оценивания.
Корректная связь $\vec{g}$ и $\vec{B}$ с расстоянием в ходе всего решения — 1 балл.
Разложение скорости частицы на круговую скорость и скорость дрейфа — 1 балл.
Запись нулевой суммы сил для частицы, движущейся со скоростью дрейфа — 1 балл.
Полученное значение скорости дрейфа — 1 балл.
Обоснованный выбор направления дрейфа — 1 балл.

Указание 1: Если не указан факт колебаний частицы в магнитном поле и исследовано движение с постоянной скоростью, все пункты, кроме второго, учитываются, т.е. задача оценивается из 4-х баллов.
Указание 2: Если учитывается кривизна траектории, т.е. указано, что разность силы тяжести и силы Лоренца создаёт центростремительное ускорение, и решается возникающее квадратное уравнение, такое решение оценивается из полных 5-и баллов.

Ф11.1-2 Современные машины Формулы 1 имеют днище в форме тоннеля Вентури, нижняя часть которого образована полотном гоночной трассы. Схематично тоннель Вентури в разрезе представлен на рисунке, поток воздуха обозначен стрелкой. Оцените прижимную силу, действующую на машину Формулы 1, едущую по прямой со скоростью 80 м/с. Высота от верхней точки днища до асфальта на машине $a = 30$ см, а перепад высот на днище равен $h = 15$ см. Площадь низкой части тоннеля Венутри считайте равной $S = 2$ м^2, изменение ширины пренебрежимо малым, а тоннель Вентури изолированным от боковых потоков воздуха за счёт аэродинамики. Плотность воздуха примите равной $1,2$ кг/м^3

Ответ. $F = 10240$ Н.

Решение. Считая воздух несжимаемым, запишем уравнение Бернулли и закон сохранения массы

$$\Delta P = \rho/2(v'^2 - v^2)$$

$$val = v'(a-h)l,$$

где a – высота верхней точки днища до поверхности трассы. Тогда, получим, что

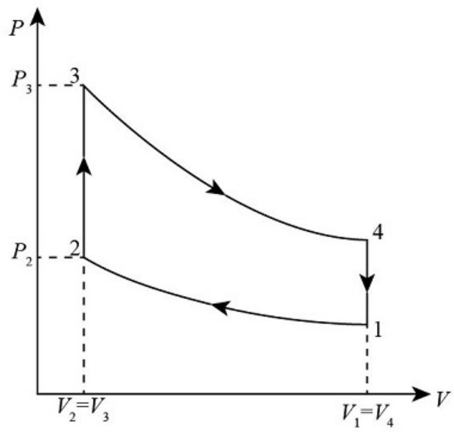
$$\Delta P = \frac{\rho}{2} v^2 \left((1-h/a)^{-2} - 1\right)$$

Прижимная сила для машины будет равна

$$F = \Delta P S = \frac{\rho v^2 S}{2}\left((1-h/a)^{-2} - 1\right) = 10240 \text{ Н}.$$

Критерии оценивания.
Записан закон Бернулли для воздуха под днищем и получен перепад давления — 1 балл.
Записан закон сохранения массы для воздуха под днищем — 1 балла.
Получено выражение для давления в тоннеле Вентури — 1 балл.
Получено выражение для прижимной силы, действующей на болид — 1 балл.
Получен верный ответ — 1 балл.

Ф11.2-2 Один из ранних двигателей внутреннего сгорания основан на цикле Отто (на рисунке), состоящем из изохорного подвода тепла, адиабатического расширения, изохорного охлаждения и адиабатического сжатия. Конструкторы сделали двигатель со степенью сжатия, отношением наибольшего и наименьшего объемов в цикле, $\alpha = 10,5$ и мощностью $W = 136$ л.с. Какой расход 95го бензина Q, литров в час, будет у такого двигателя? Считайте что в течении одного такта работы двигателя количество рабочего вещества примерно постоянно, а отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объеме $\gamma = C_P/C_V \approx 1,4$ для рабочего вещества. *1 л.с. равна 0,736 кВт. Удельная теплота сгорания 95-го бензина равна $\lambda = 33,5$ МДж/л*



Ответ. 18 л/ч.

Решение. Поскольку мы знаем величину полезной мощности, то мощность, получаемая от сжигания бензина можно выразить как $W_{\text{бенз.}} = \lambda Q = W/\eta$. Осталось найти КПД цикла Отто. Количество подводимой теплоты при изохорном нагреве равно $Q_{2-3} = \frac{i}{2}R(T_3 - T_2)$. Количество отводимой теплоты при изохорном охлаждении равно $Q_{4-1} = \frac{i}{2}R(T_1 - T_4)$. Отсюда получим, что КПД будет равен

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{1-4}|}{|Q_{2-3}|} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1} \cdot \frac{T_1}{T_2}.$$

Так как для адиабаты справедливо, что $PV^\gamma = const$, то $TV^{\gamma-1} = const$. Отсюда можно получить, что $T_4/T_1 = T_3/T_2$. Отношение $T_1/T_2 = (V_2/V_1)^{\gamma-1} = (1/\alpha)^{\gamma-1}$. Поэтому, КПД равен:

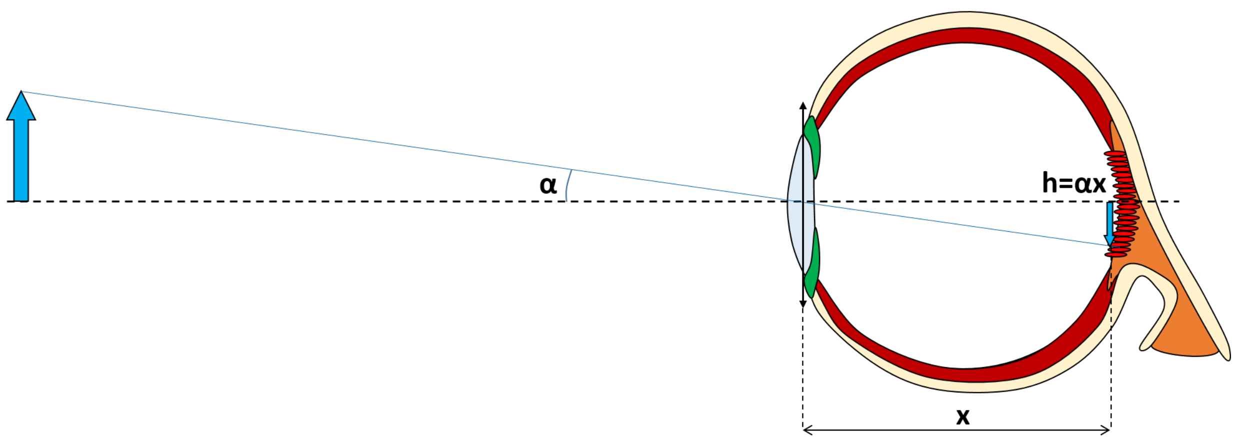
$$\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$$

Получим ответ $Q = \left(1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}\right)^{-1} \frac{W}{\lambda} = 18$ л/ч.
Критерии оценивания.
Записано выражение для КПД через отношение мощностей — 1 балл.
Получено выражение для КПД через отношение температур — 1 балла.
Получено выражение для КПД через степень сжатия — 1 балла.
Получено итоговое выражение для расхода — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

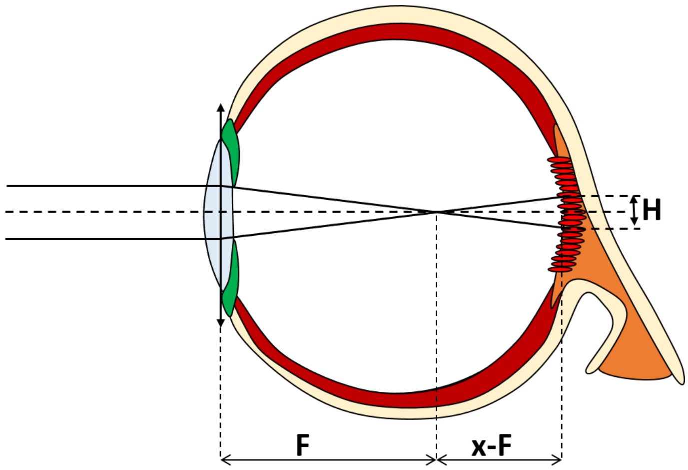
Ф11.3-2 Известно, что диаметр человеческого зрачка ночью составляет около $d = 6$ мм. Определите разрешающую способность при наблюдении звёзд невооружённым близоруким глазом с дефектом зрения $\Delta = -1$ дптр. Дифракцией можно пренебречь.
Примечание: дефект зрения для близорукого глаза равен оптической силе линзы, которую необходимо использовать человеку для фокусировки на далёких объектах.

Ответ. $0,34°$

Решение. Разрешающая способность глаза - это минимальный угол между направлениями на два точечных источника, необходимый для того, чтобы человек смог распознать их как две отдельные точки (далее для угла между направлениями на источники будет использоваться термин «угловое расстояние»).
Пусть x - расстояние от хрусталика (собирающей линзы глаза) до сетчатки, на которой строится изображение. Ввиду малости углов, с которыми нам предстоит работать, можем считать, что двум источникам на угловом расстоянии a будет соответствовать пара изображений на сетчатке на линейном расстоянии $a \cdot x$ друг от друга (чтобы понять это, достаточно проследить ход лучей, прошедших через центр хрусталика без преломления).



При неточной фокусировке хрусталика точечные источники света создают на сетчатке не точечные изображения, а светлые пятна размером H. При этом если угловое расстояние a между двумя источниками таково, что $a \cdot x < H$, пятна от них сливаются и человеку становится трудно разрешить эти источники. Таким образом, разрешение глаза будет равно $a_{min} = \frac{H}{x}$.



Займёмся поиском H. При наблюдении далёких источников света глаз принимает параллельные пучки лучей. Для их фокусировки на сетчатке должно выполняться условие $F_0 = x$ или $D_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{1}{x}$, но близорукому человеку для этого приходится использовать линзу с оптической силой Δ, т.е. для реальной оптической силы D его максимально расслабленного хрусталика верно соотношение $D_0 = D + \Delta$ или $D = D_0 - \Delta = \frac{1}{x} - \Delta$. Или, наконец:

$$F = \frac{1}{\frac{1}{x} - \Delta} = \frac{x}{1 - x \cdot \Delta}$$

Рассмотрим ход крайних лучей пучка, попадающих в зрачок. Они приходят в сетчатку на расстоянии H друг от друга. В силу подобия можем записать:

$$\frac{H}{d} = \frac{x-F}{F} = \frac{x}{F} - 1 = (1 - x \cdot \Delta) - 1 = -x \cdot \Delta \Rightarrow H = -x \cdot \Delta \cdot d$$

Наконец, разрешающая способность:

$$a_{min} = \frac{H}{x} = \frac{-x \cdot \Delta \cdot d}{x} = -\Delta \cdot d = 0,006 \text{ радиан} \approx 0,34^\circ$$

Это примерно в 20 раз хуже, чем стандартное разрешение человеческого глаза (1'). Прямая пропорциональность между конечным результатом и d объясняет, почему при фокусировке помогают диафрагмы в виде небольшого (до 1 мм) отверстия в непрозрачном материале или прищур.

Критерии оценивания.

Связь между угловым смещением объекта и его положением на сетчатке — 1 балл.

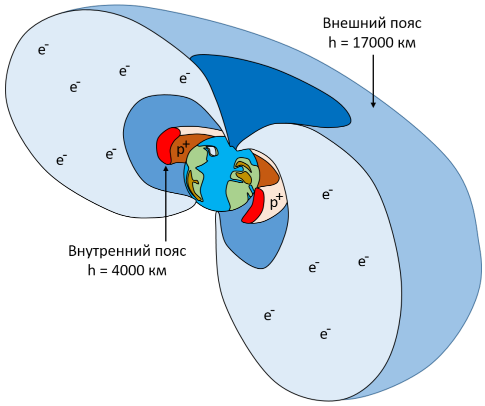
Условие разрешимости пары источников — 1 балл.

Выражение для фокусного расстояния глаза — 1 балл.

Выражение размеров пятна от точечного источника на сетчатке — 1 балл.

Итоговое выражение и ответ — 1 балл.

Ф11.4-2 Радиационные пояса Аллена - два пояса заряженных частиц, которые удерживаются от падения на Землю действием магнитного поля. Внутренний пояс состоит в основном из протонов и находится на высоте $h_1 = 4000$ км над поверхностью Земли, а внешний расположился на высоте $h_2 = 17000$ км и содержит в основном электроны. Оцените среднюю скорость дрейфа по долготе (на восток или на запад - выберите верное направление) для частиц внешнего пояса Аллена вблизи плоскости экватора. Радиус Земли равен $r_0 = 6400$ км; индукция земного магнитного поля направлена вдоль поверхности, составляет $B_0 = 50$ мкТл на нулевой высоте и убывает как куб расстояния до центра планеты. Электростатическим взаимодействием между частицами можно пренебречь.



Ответ. 4,1 мкм/с на запад.

Решение.
В дальнейшем решении будет присутствовать индекс i, равный 1 для внутреннего пояса (протонов) и 2 для внешнего пояса (электронов). Выразим основные величины, задающие движение в поясах:

Радиус i-го пояса:

$$r_i = r_0 + h_i;$$

Гравитационное ускорение частиц (g_0 - ускорение свободного падения на поверхности Земли):

$$g_i = \left(\frac{r_0}{r_i}\right)^2 g_0;$$

Индукция магнитного поля:

$$B_i = \left(\frac{r_0}{r_i}\right)^3 B_0;$$

На заряженную частицу массой m_i и зарядом e_i, движущуюся со скоростью $\vec{v_i}$ перпендикулярно линиям магнитного поля в плоскости экватора, действует сила тяжести $m_i\vec{g_i}$ и сила Лоренца $e_i \cdot \vec{v_i} \times \vec{B_i}$. Скорость $\vec{v_i}$ можно представить как $\vec{u_i} + \Delta\vec{v_i}$, где $\vec{u_i}$ - скорость движения, при которой сила Лоренца компенсирует силу тяжести: $e_i \cdot \vec{u_i} \times \vec{B_i} = -m_i\vec{g_i}$. Тогда суммарная сила, действующая на частицу равна:

$$m_i\vec{g_i} + e_i \cdot (\vec{u_i} + \Delta\vec{v_i}) \times \vec{B_i} = m_i\vec{g_i} + e_i \cdot \vec{u_i} \times \vec{B_i} + e_i \cdot \Delta\vec{v_i} \times \vec{B_i} = e_i \cdot \Delta\vec{v_i} \times \vec{B_i}$$

Получившаяся сила всегда лежит в плоскости экватора и перпендикулярна $\Delta\vec{v_i}$, т.е. движение частицы можно представить как вращение со скоростью $|\Delta\vec{v_i}|$ по окружности вокруг центра, который сам дрейфует в плоскости экватора со скоростью $\vec{u_i}$. На достаточно длительных временных интервалах средняя скорость кругового движения стремится к нулю и нас не интересует, поэтому задача сводится к поиску $\vec{u_i}$:

$$|e_i \cdot \vec{u_i} \times \vec{B_i}| = |-m_i\vec{g_i}| \Rightarrow e^+u_iB_i = m_ig_i \Rightarrow u_i = \frac{m_ig_i}{e^+B_i} = \frac{m_ig_0}{e^+B_0} \cdot \frac{r_i}{r_0} = \frac{m_ig_0}{e^+B_0} \cdot (1 + \frac{h_i}{r_0})$$

Подставляя численные значения, получим для пояса протонов: $u_1 = 3,3$мм/с;
и то же самое для пояса электронов: $u_2 = 4,1$мкм/с.

Линии индукции магнитного поля Земли направлены с юга на север (магнитные полушария противоположны географическим). Следовательно, чтобы ощутить действие силы Лоренца, противонаправленной силе тяжести, положительные заряды (протоны) должны дрейфовать на восток, а отрицательные (электроны) - на запад.

Отдельно отметим, что итоговые скорости на порядки меньше характерных скоростей на околоземных орбитах (единицы км/с), что позволяет нам не учитывать вклад кривизны траектории и связанных с ней ускорений.

Критерии оценивания.
Корректная связь $\vec{g}$ и $\vec{B}$ с расстоянием в ходе всего решения — 1 балл.
Разложение скорости частицы на круговую скорость и скорость дрейфа — 1 балл.
Запись нулевой суммы сил для частицы, движущейся со скоростью дрейфа — 1 балл.
Полученное значение скорости дрейфа — 1 балл.
Обоснованный выбор направления дрейфа — 1 балл.
Указание 1: Если не указан факт колебаний частицы в магнитном поле и исследовано движение с постоянной скоростью, все пункты, кроме второго, учитываются, т.е. задача оценивается из 4-х баллов.
Указание 2: Если учитывается кривизна траектории, т.е. указано, что разность силы тяжести и силы Лоренца создаёт центростремительное ускорение, и решается возникающее квадратное уравнение, такое решение оценивается из полных 5-и баллов.