Научно-техническая олимпиада «Старт в науку»
2025-2026 уч. года
Математика
Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Черновики не проверяются.

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 5.

Максимальное число баллов за олимпиаду по математике 15.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит **0 баллов**.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается **1 балл**.

М9.1-1 Найдите все значения параметра a, при которых многочлен

$$x^4 + ax^3 + (a+2)x^2 + ax + 1$$

является квадратом некоторого другого многочлена.

Ответ. $a = 0$ или $a = 4$.

Решение. Поскольку старший коэффициент многочлена равен 1, он может быть квадратом только многочлена вида $p(x) = dx^2 + bx + c$, где $d = \pm 1$. Поскольку многочлен $p(x)$ возводится в квадрат, можно считать, что $d = 1$. Воспользуемся методом неопределённых коэффициентов. Возведём $p(x)$ в квадрат:

$$(x^2 + bx + c)^2 = x^4 + 2bx^3 + (b^2 + 2c)x^2 + 2bcx + c^2.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x исходного многочлена и полученного выражения:

$$\begin{cases} 2b = a, \\ b^2 + 2c = a + 2, \\ 2bc = a, \\ c^2 = 1. \end{cases}$$

Из последнего уравнения следует, что $c = \pm 1$. Рассмотрим оба случая.
Пусть $c = 1$. Тогда из первого и третьего уравнений $2b = a$. Из второго уравнения $b^2 + 2 = a + 2$, откуда $b^2 = a$. Значит, $b^2 = 2b$, то есть $b(b-2) = 0$. Если $b = 0$, то $a = 0$. (При этом $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$). Если $b = 2$, то $a = 4$. (При этом $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x^2 + 2x + 1)^2$).
Пусть теперь $c = -1$. Тогда из третьего уравнения $a = -2b$. Сравнивая с первым уравнением $a = 2b$, получаем $2b = -2b$, откуда $b = 0$ и $a = 0$. Подставим $b = 0$, $c = -1$ и $a = 0$ во второе уравнение: $0^2 + 2(-1) = 0 + 2 \Rightarrow -2 = 2$, противоречие. Значит, при $c = -1$ решений нет.

Комментарий. Верно составлена система уравнений, связывающая коэффициенты многочлена 4 степени с коэффициентами неизвестного квадратного трёхчлена — 2 балла;
Потеряно одно из значений параметра или приобретено одно постороннее решение — не более 3 баллов за задачу;
Потеряно более одного истинного значения или приобретено более двух посторонних значений параметра — не более 2 баллов за задачу.

М9.2-1 Пусть $N = 2^9 \cdot 3^8$. Случайным образом выбирается делитель числа N (включая 1 и само число). Найдите вероятность того, что на этот делитель также делится хотя бы одно из чисел $A = 2^9 \cdot 3^3$, $B = 2^3 \cdot 3^8$ или $C = 2^3 \cdot 3^3$.

Ответ. $\dfrac{2}{3}$.

Решение. Число N имеет $(9+1)(8+1) = 10 \cdot 9 = 90$ делителей, каждый из которых имеет вид $2^a \cdot 3^b$, где $0 \le a \le 9$, $0 \le b \le 8$.
Обозначим $x = 2^a 3^b$.
Заметим, что если число C делится на x, то оба числа A и B делятся на x, поэтому достаточно найти вероятность того, что хотя бы одно из чисел A и B делятся на x.
Число A делится на $x \Leftrightarrow a \le 9,\ b \le 3$, количество таких делителей $(9+1)(3+1) = 10 \cdot 4 = 40$;
Число B делится на $x \Leftrightarrow a \le 3,\ b \le 8$, количество таких делителей $(3+1)(8+1) = 4 \cdot 9 = 36$;
Заметим, что условие, что оба числа делятся на x, совпадает с условием $a \le 3,\ b \le 3$, и количество удовлетворяющих этому условию делителей равно $4 \cdot 4 = 16$.

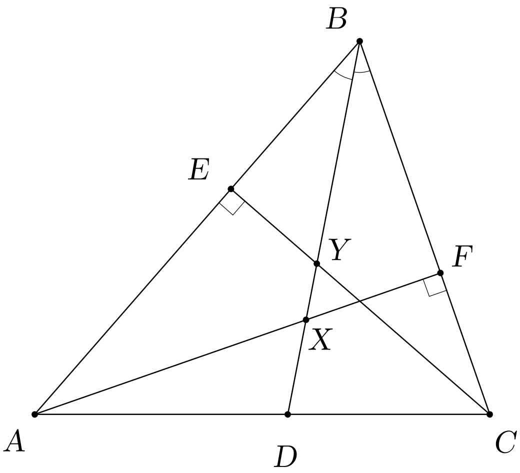
По формуле включений и исключений получаем количество делителей, которые делят хотя бы одно из чисел A и B:

$$40 + 36 - 16 = 60.$$

Искомая вероятность равна $\dfrac{60}{90} = \dfrac{2}{3}$.

Комментарий. Замечено, что от условия на делимость числа C можно избавиться — 1 балл;
Верно вычислено число делителей N (знаменатель) — 1 балл;
Верно вычислено количество делителей, которые делят хотя бы одно из чисел A и B (числитель) — 3 балла.
Комбинаторная ошибка при подсчёте числителя или знаменателя вероятности — 0 баллов за соответствующую часть.

M9.3-1 Высоты AF и CE остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекают биссектрису BD этого треугольника в точках X и Y соответственно. Найдите AX, если $CY = 9$, а $YE : XF = 3 : 4$.



Ответ. 12.

Решение. По теореме о биссектрисе в треугольнике ABF получаем

$$\frac{FX}{XA} = \frac{FB}{BA}.$$

Аналогично из треугольника CBE находим

$$\frac{EY}{YC} = \frac{EB}{BC}.$$

Заметим, что $\dfrac{FB}{BA} = \dfrac{EB}{BC} = \cos\angle ABC$, поэтому $\dfrac{EY}{YC} = \dfrac{FX}{XA}$. Значит, $AX = CY \cdot \dfrac{XF}{YE} = 12$.

Комментарий. Записана теорема о биссектрисе хотя бы для одного из треугольников ABF или CBE — 1 балл;
Замечено, что отношение $FX : XA$ или отношение $EY : YC$ равно косинусу угла B (или что треугольники CBE и ABF подобны) — 2 балла.

M9.1-2 Найдите все значения параметра a, при которых многочлен

$$x^4 + ax^3 + (2a-1)x^2 + ax + 1$$

является квадратом некоторого другого многочлена.

Ответ. $a = 2$ или $a = 6$.

Решение. Поскольку старший коэффициент многочлена равен 1, он может быть квадратом только многочлена вида $p(x) = dx^2 + bx + c$, где $d = \pm 1$. Поскольку многочлен $p(x)$ возводится в квадрат, можно считать, что $d = 1$. Воспользуемся методом неопределённых коэффициентов. Возведём $p(x)$ в квадрат:

$$(x^2 + bx + c)^2 = x^4 + 2bx^3 + (b^2 + 2c)x^2 + 2bcx + c^2.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x исходного многочлена и полученного выражения:

$$\begin{cases} 2b = a, \\ b^2 + 2c = 2a - 1, \\ 2bc = a, \\ c^2 = 1. \end{cases}$$

Из последнего уравнения следует, что $c = \pm 1$. Рассмотрим оба случая.
Пусть $c = 1$. Тогда из первого и третьего уравнений $2b = a$. Из второго уравнения $b^2 + 2 = 2a - 1$, откуда $b^2 = 2a - 3$. Значит, $b^2 = 2(2b) - 3 = 4b - 3$, то есть $(b-1)(b-3) = 0$. Если $b = 1$, то $a = 2$. (При этом $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$). Если $b = 3$, то $a = 6$. (При этом $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$).
Пусть теперь $c = -1$. Тогда из третьего уравнения $a = -2b$. Сравнивая с первым уравнением $a = 2b$, получаем $2b = -2b$, откуда $b = 0$ и $a = 0$. Подставим $b = 0$, $c = -1$ и $a = 0$ во второе уравнение: $0^2 + 2(-1) = 2 \cdot 0 - 1 \Rightarrow -2 = -1$, противоречие. Значит, при $c = -1$ решений нет.

Комментарий. Верно составлена система уравнений, связывающая коэффициенты многочлена 4 степени с коэффициентами неизвестного квадратного трёхчлена — 2 балла;
Потеряно одно из значений параметра или приобретено одно постороннее решение — не более 3 баллов за задачу;
Потеряно более одного истинного значения или приобретено более двух посторонних значений параметра — не более 2 баллов за задачу.

M9.2-2 Пусть $N = 2^7 \cdot 3^6$. Случайным образом выбирается делитель числа N (включая 1 и само число). Найдите вероятность того, что на этот делитель также делится хотя бы одно из чисел $A = 2^7 \cdot 3^2$, $B = 2^2 \cdot 3^6$ или $C = 2^2 \cdot 3^2$.

Ответ. $\dfrac{9}{14}$.

Решение. Число N имеет $(7+1)(6+1) = 8 \cdot 7 = 56$ делителей, каждый из которых имеет вид $2^a \cdot 3^b$, где $0 \le a \le 7$, $0 \le b \le 6$.
Обозначим $x = 2^a 3^b$.
Заметим, что если число C делится на x, то оба числа A и B делятся на x, поэтому достаточно найти вероятность того, что хотя бы одно из чисел A и B делятся на x.
Число A делится на $x \Leftrightarrow a \le 7,\ b \le 2$, количество таких делителей $(7+1)(2+1) = 8 \cdot 3 = 24$;
Число B делится на $x \Leftrightarrow a \le 2,\ b \le 6$, количество таких делителей $(2+1)(6+1) = 3 \cdot 7 = 21$;
Заметим, что условие, что оба числа делятся на x, совпадает с условием $a \le 2,\ b \le 2$, и количество удовлетворяющих этому условию делителей равно $3 \cdot 3 = 9$.

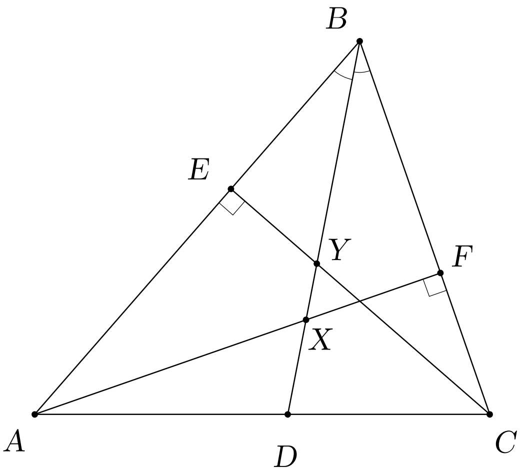
По формуле включений и исключений получаем количество делителей, которые делят хотя бы одно из чисел A и B:

$$24 + 21 - 9 = 36.$$

Искомая вероятность равна $\frac{36}{56} = \frac{9}{14}$.

Комментарий. Замечено, что от условия на делимость числа C можно избавиться — 1 балл;
Верно вычислено число делителей N (знаменатель) — 1 балл;
Верно вычислено количество делителей, которые делят хотя бы одно из чисел A и B (числитель) — 3 балла.
Комбинаторная ошибка при подсчёте числителя или знаменателя вероятности — 0 баллов за соответствующую часть.

M9.3-2 Высоты AF и CE остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекают биссектрису BD этого треугольника в точках X и Y соответственно. Найдите CY, если $AX = 20$, а $YE : XF = 4 : 5$.



Ответ. 16.

Решение. По теореме о биссектрисе в треугольнике ABF получаем

$$\frac{FX}{XA} = \frac{FB}{BA}.$$

Аналогично из треугольника CBE находим

$$\frac{EY}{YC} = \frac{EB}{BC}.$$

Заметим, что $\frac{FB}{BA} = \frac{EB}{BC} = \cos\angle ABC$, поэтому $\frac{EY}{YC} = \frac{FX}{XA}$. Значит, $CY = AX \cdot \frac{YE}{XF} = 16$.

Комментарий. Записана теорема о биссектрисе хотя бы для одного из треугольников ABF или CBE — 1 балл;
Замечено, что отношение $FX : XA$ или отношение $EY : YC$ равно косинусу угла B (или что треугольники CBE и ABF подобны) — 2 балла.

M10.1-3 Вычислите $\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{7}\cdot\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{7}-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{7}-2\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{7}\right)$.

Ответ. 4.

Решение. Преобразуем выражение в скобках:

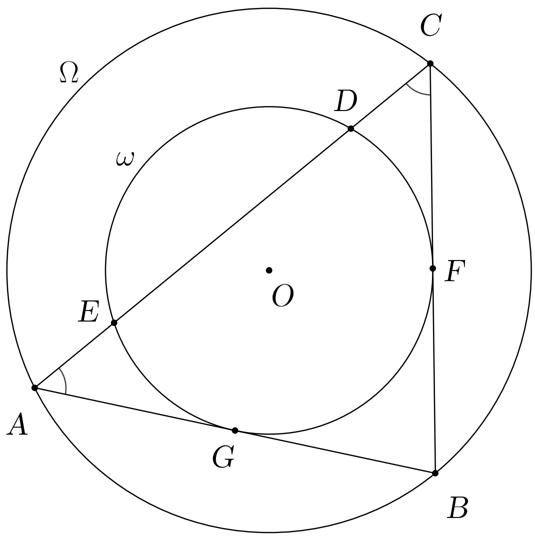
$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}-2\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}=\frac{\cos^2\frac{\pi}{7}-\sin^2\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}}-2\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}-\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}}=\frac{4\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{4\pi}{7}}=4\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{7}.$$

Значит, искомое произведение равно 4.

Комментарий. Ошибка в тригонометрической формуле — 0 баллов за задачу.

M10.2-3 Две окружности ω и Ω имеют общий центр. Хорда AB окружности Ω касается ω, а хорда BC окружности Ω выбрана так, что её середина лежит на ω. Окружность ω пересекает отрезок AC в двух точках, которые делят этот отрезок на части с длинами 1, 3, 1, считая от точки A. Найдите площадь треугольника ABC.



Ответ. $\dfrac{5\sqrt{39}}{4}$.

Решение. Пусть F — середина BC, G — середина AB. Тогда G — точка касания ω с прямой AB, поскольку перпендикуляр из центра окружности к хорде делит её пополам. Поскольку $OC = OB$, $OF \perp BC$, поэтому BC касается ω. Поскольку $BF = BG$, отрезки AB и BC также равны, а значит, ΔABC — равнобедренный. Пусть E и D — точки пересечения AC с окружностью ω (E лежит ближе к A, чем D). По теореме о квадрате касательной $AG^2 = AE\cdot AD = 1\cdot 4$, откуда $AG = 2$. Тогда $AB = BC = 2AG = 4$. С помощью теоремы Пифагора найдем высоту треугольника ABC, проведённую из вершины B: она равна $\sqrt{AB^2-\dfrac{AC^2}{4}}=$ $=\sqrt{16-\dfrac{25}{4}}=\dfrac{\sqrt{39}}{2}$. Площадь треугольника ABC тогда равна $\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\dfrac{\sqrt{39}}{2}=\dfrac{5\sqrt{39}}{4}$.

Комментарий. Доказано, что BC касается ω — 1 балл;
Доказано, что ΔABC равнобедренный — 1 балл;
Вычислена высота или боковая сторона равнобедренного треугольника — 2 балла.

M10.3-3 У Пети есть 10 различных конвертов, на каждый из которых нужно наклеить марку и поставить печать поверх марки. Все марки и все печати одинаковы, но печать на каждый конверт ставится строго после того, как наклеена марка. Сколькими способами Петя может выбрать порядок всех 20 действий (10 наклеиваний марок и 10 печатей)?

Ответ. $\dfrac{20!}{2^{10}}$.

Решение. Обозначим для каждого конверта два действия:

- M_i — наклеить марку на i-й конверт;

- P_i — поставить печать на i-й конверт,

где $i = 1, \ldots, 10$. Тогда всего имеется 20 различных действий: $M_1, \ldots, M_{10}, P_1, \ldots, P_{10}$.
Если бы никаких ограничений не было, то их можно было бы упорядочить 20! способами. Однако для каждого i должно выполняться условие: M_i происходит раньше, чем P_i.
Рассмотрим одну фиксированную пару (M_i, P_i). Среди всех возможных порядков этих двух действий ровно в половине случаев M_i стоит раньше P_i, и ровно в половине случаев — наоборот. Значит, условие того, что M_i происходит раньше, чем P_i, уменьшает число допустимых перестановок в 2 раза.
Таких независимых условий 10, поэтому число допустимых порядков равно $\dfrac{20!}{2^{10}}$.

Комментарий. Комбинаторная ошибка — 0 баллов за задачу.

M10.1-4 Вычислите $\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{11}\cdot\left(2\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{11}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{11}-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{11}\right)$.

Ответ. -4.

Решение. Преобразуем выражение в скобках:

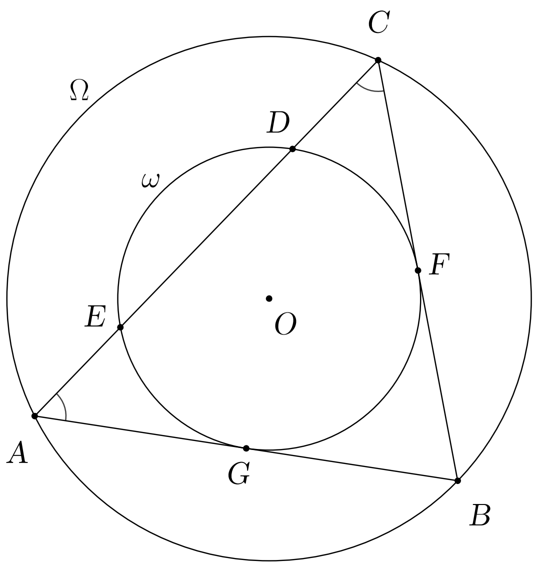
$$2\operatorname{tg}\frac{2\pi}{11}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{11}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{11}=2\operatorname{tg}\frac{2\pi}{11}-\frac{\cos^2\frac{\pi}{11}-\sin^2\frac{\pi}{11}}{\cos\frac{\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{2\pi}{11}}{\cos\frac{2\pi}{11}}-\frac{2\cos\frac{2\pi}{11}}{\sin\frac{2\pi}{11}}=\frac{-4\cos\frac{4\pi}{11}}{\sin\frac{4\pi}{11}}=-4\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{11}.$$

Значит, искомое произведение равно -4.

Комментарий. Ошибка в тригонометрической формуле — 0 баллов за задачу.

M10.2-4 Две окружности ω и Ω имеют общий центр. Хорда AB окружности Ω касается ω, а хорда BC окружности Ω выбрана так, что её середина лежит на ω. Окружность ω пересекает отрезок AC в двух точках, которые делят этот отрезок на части с длинами 1, 2, 1, считая от точки A. Найдите площадь треугольника ABC.



Ответ. $4\sqrt{2}$.

Решение. Пусть F — середина BC, G — середина AB. Тогда G — точка касания ω с прямой AB, поскольку перпендикуляр из центра окружности к хорде делит её пополам. Поскольку $OC = OB$, $OF \perp BC$, поэтому BC касается ω. Поскольку $BF = BG$, отрезки AB и BC также равны, а значит, ΔABC — равнобедренный. Пусть E и D — точки пересечения AC с окружностью ω (E лежит ближе к A, чем D). По теореме о квадрате касательной $AG^2 = AE\cdot AD = 1\cdot 3$, откуда $AG=\sqrt{3}$. Тогда $AB = BC = 2AG = 2\sqrt{3}$. По теореме Пифагора найдем высоту треугольника ABC, проведённую из вершины B: она равна $\sqrt{AB^2-\dfrac{AC^2}{4}}=\sqrt{12-4}=$ $=2\sqrt{2}$. Площадь треугольника ABC тогда равна $\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

Комментарий. Доказано, что BC касается ω — 1 балл;
Доказано, что ΔABC равнобедренный — 1 балл;
Вычислена высота или боковая сторона равнобедренного треугольника — 2 балла.

M10.3-4 У Пети есть 12 различных конвертов, на каждый из которых нужно наклеить марку и поставить печать поверх марки. Все марки и все печати одинаковы, но печать на каждый конверт ставится строго после того, как наклеена марка. Сколькими способами Петя может выбрать порядок всех 24 действий (12 наклеиваний марок и 12 печатей)?

Ответ. $\dfrac{24!}{2^{12}}$.

Решение. Обозначим для каждого конверта два действия:

- M_i — наклеить марку на i-й конверт;

- P_i — поставить печать на i-й конверт,

где $i = 1, \ldots, 10$. Тогда всего имеется 24 различных действия: $M_1, \ldots, M_{12}, P_1, \ldots, P_{12}$.
Если бы никаких ограничений не было, то их можно было бы упорядочить 24! способами. Однако для каждого i должно выполняться условие: M_i происходит раньше, чем P_i.
Рассмотрим одну фиксированную пару (M_i, P_i). Среди всех возможных порядков этих двух действий ровно в половине случаев M_i стоит раньше P_i, и ровно в половине случаев — наоборот. Значит, условие того, что M_i происходит раньше, чем P_i, уменьшает число допустимых перестановок в 2 раза.
Таких независимых условий 12, поэтому число допустимых порядков равно $\dfrac{24!}{2^{12}}$.

Комментарий. Комбинаторная ошибка — 0 баллов за задачу.

M11.1-5 В урне находится 200 шаров, каждый из них либо красный, либо синий. Их последовательно достают по одному в случайном порядке, а извлечённые шары обратно в урну не возвращаются. Вероятность того, что последний извлечённый шар красный, равна 0,2. Сколько изначально было синих шаров?

Ответ. 160.

Решение. Пусть r — количество красных, а b — количество синих шаров. Количество способов выбрать порядок, в котором извлекаются шары, равно C_{r+b}^{r}. Из всех этих способов красный шар идёт в конце в C_{r+b-1}^{r-1} вариантах, поэтому вероятность извлечь красный шар последним равна $\dfrac{C_{r+b-1}^{r-1}}{C_{r+b}^{r}} = \dfrac{r}{r+b}$. Пусть $x = \dfrac{r}{b}$. По условию $\dfrac{x}{1+x} = 0{,}2$, откуда $x = \dfrac{1}{4}$. Значит, красных шаров в 4 раза меньше, чем синих, поэтому синих шаров было 160.

Комментарий. Данная в условии вероятность записана как отношение $\dfrac{r}{r+b}$ — 1 балл;
Приведено корректное обоснование формулы $\dfrac{r}{r+b}$ — 3 балла (суммируются с предыдущим).

M11.2-5 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{2\sqrt{x}+\sqrt{y}} = y^{12}, \\ y^{2\sqrt{x}+\sqrt{y}} = x^{3}. \end{cases}$$

Ответ. $(1;1)$ и $\left(\dfrac{81}{16}; \dfrac{9}{4}\right)$.

Решение. Заметим, что уравнению могут удовлетворять лишь $x, y > 0$. Данная система равносильна следующим:

$$\begin{cases} e^{(2\sqrt{x}+\sqrt{y})\ln x} = e^{12\ln y}, \\ e^{(2\sqrt{x}+\sqrt{y})\ln y} = e^{3\ln x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2\sqrt{x}+\sqrt{y})\ln x = 12\ln y, \\ (2\sqrt{x}+\sqrt{y})\ln y = 3\ln x. \end{cases}$$

Пусть $\ln y = 0$. Тогда из второго уравнения и $\ln x = 0$, и $x = y = 1$. Нетрудно убедиться, что эта пара является решением системы.

Рассмотрим теперь случай, когда x и y отличны от 1. Поскольку x и y положительны, выражение $2\sqrt{x} + \sqrt{y}$ также положительно. Разделим первое уравнение на второе и получим $\left(\dfrac{\ln x}{\ln y}\right)^2 = 4$, откуда $\ln x = \pm 2\ln y$, то есть $x = y^2$ или $x = \dfrac{1}{y^2}$.

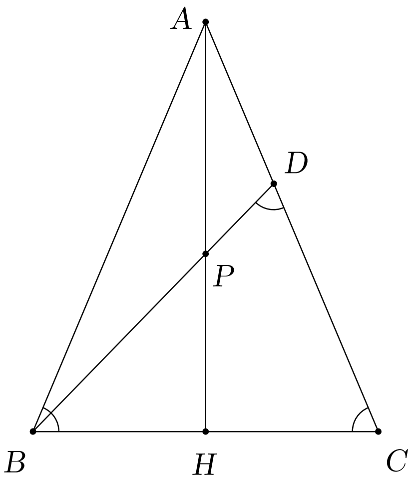
Пусть $x = y^2 \neq 1$. Тогда получаем $2y + \sqrt{y} = 6$, откуда $y = \dfrac{9}{4}$ и $x = \dfrac{81}{16}$. Эта пара также является решением системы.

Пусть $x = \dfrac{1}{y^2}$. Тогда $\dfrac{2}{y} + \sqrt{y} = -6$, что невозможно, поскольку y и $\sqrt{y}$ положительны.

Итак, системе удовлетворяют две пары: $(1;1)$ и $\left(\dfrac{81}{16}; \dfrac{9}{4}\right)$.

Комментарий. Пара $(1, 1)$ получена подбором и других продвижений нет — 1 балл за задачу;
Потеряны или приобретены посторонние пары (x, y) — снять по 2 балла за каждую пару.

M11.3-5 На боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC выбрана такая точка D, что отрезок BD равен его основанию BC. Пусть P — точка пересечения BD с высотой AH этого треугольника. Найдите $\angle ABC$, если $AP : PH = 2$.



Ответ. $\operatorname{arctg}\sqrt{7}$.

Решение. Пусть искомый угол $\angle ABC = \alpha$. Треугольники ABC и BDC — равнобедренные, поэтому $\angle ACB = \angle ABC = \angle BDC = \alpha$. Обозначим $BH = x$. Поскольку высота AH треугольника ABC совпадает с его медианой, $HC = x$. Из треугольника BDC находим $\angle DBC = 180^\circ - 2\alpha$. Тогда из прямоугольного треугольника BPH получаем $PH = x\operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha) = -x\operatorname{tg}2\alpha$. А из прямоугольного треугольника ABH имеем $AH = x\operatorname{tg}\alpha$. По условию $AP : PH = 2$. Подставив найденные выражения, получаем

$$2 = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha}{-\operatorname{tg}2\alpha} = -1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{3}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{7}.$$

Итак, $\angle ABC = \operatorname{arctg}\sqrt{7}$.

Замечание. Нетрудно убедиться, что найденный угол больше 60°, поэтому точка D в самом деле лежит на отрезке AC.

Комментарий. Отношение $AP : PH$ выражено через тригонометрические функции искомого угла — 3 балла;

Отсутствует проверка, что полученный угол больше 60° — баллы не снимаются.

M11.1-6 В урне находится 200 шаров, каждый из них либо красный, либо синий. Их последовательно достают по одному в случайном порядке, а извлечённые шары обратно в урну не возвращаются. Вероятность того, что последний извлечённый шар красный, равна 0,25. Сколько изначально было синих шаров?

Ответ. 150.

Решение. Пусть r — количество красных, а b — количество синих шаров. Количество способов выбрать порядок, в котором извлекаются шары, равно C_{r+b}^{r}. Из всех этих способов красный шар идёт в конце в C_{r+b-1}^{r-1} вариантах, поэтому вероятность извлечь красный шар последним равна $\dfrac{C_{r+b-1}^{r-1}}{C_{r+b}^{r}} = \dfrac{r}{r+b}$. Пусть $x = \dfrac{r}{b}$. По условию $\dfrac{x}{1+x} = 0{,}25$, откуда $x = \dfrac{1}{3}$. Значит, красных шаров в 3 раза меньше, чем синих, поэтому синих шаров было 150.

Комментарий. Данная в условии вероятность записана как отношение $\dfrac{r}{r+b}$ — 1 балл;
Приведено корректное обоснование формулы $\dfrac{r}{r+b}$ — 3 балла (суммируются с предыдущим).

M11.2-6 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{3\sqrt{x}+\sqrt{y}} = y^4, \\ y^{3\sqrt{x}+\sqrt{y}} = x. \end{cases}$$

Ответ. $(1;1)$ и $\left(\dfrac{16}{81}; \dfrac{4}{9}\right)$.

Решение. Заметим, что уравнению могут удовлетворять лишь $x, y > 0$. Данная система равносильна следующим:

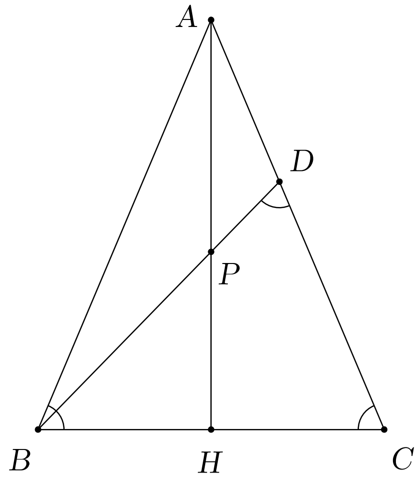
$$\begin{cases} e^{(3\sqrt{x}+\sqrt{y})\ln x} = e^{4\ln y}, \\ e^{(3\sqrt{x}+\sqrt{y})\ln y} = e^{\ln x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3\sqrt{x}+\sqrt{y})\ln x = 4\ln y, \\ (3\sqrt{x}+\sqrt{y})\ln y = \ln x. \end{cases}$$

Пусть $\ln y = 0$. Тогда из второго уравнения и $\ln x = 0$, и $x = y = 1$. Нетрудно убедиться, что эта пара является решением системы.
Рассмотрим теперь случай, когда x и y отличны от 1. Поскольку x и y положительны, выражение $3\sqrt{x} + \sqrt{y}$ также положительно. Разделим первое уравнение на второе и получим $\left(\dfrac{\ln x}{\ln y}\right)^2 = 4$, откуда $\ln x = \pm 2\ln y$, то есть $x = y^2$ или $x = \dfrac{1}{y^2}$.
Пусть $x = y^2 \neq 1$. Тогда получаем $3y + \sqrt{y} = 2$, откуда $y = \dfrac{4}{9}$ и $x = \dfrac{16}{81}$. Эта пара также является решением системы.
Пусть $x = \dfrac{1}{y^2}$. Тогда $\dfrac{3}{y} + \sqrt{y} = -2$, что невозможно, поскольку y и $\sqrt{y}$ положительны.

Итак, системе удовлетворяют две пары: $(1;1)$ и $\left(\dfrac{16}{81}; \dfrac{4}{9}\right)$.

Комментарий. Пара $(1,1)$ получена подбором и других продвижений нет — 1 балл за задачу;
Потеряны или приобретены посторонние пары (x, y) — снять по 2 балла за каждую пару.

M11.3-6 На боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC выбрана такая точка D, что отрезок BD равен его основанию BC. Пусть P — точка пересечения BD с высотой AH этого треугольника. Найдите $\angle ABC$, если $AP : PH = 3 : 4$.



Ответ. $\operatorname{arctg} \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Решение. Пусть искомый угол $\angle ABC = \alpha$. Треугольники ABC и BDC — равнобедренные, поэтому $\angle ACB = \angle ABC = \angle BDC = \alpha$. Обозначим $BH = x$. Поскольку высота AH треугольника ABC совпадает с его медианой, $HC = x$. Из треугольника BDC находим $\angle DBC = 180^\circ - 2\alpha$. Тогда из прямоугольного треугольника BPH получаем $PH = x\operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha) = -x\operatorname{tg} 2\alpha$. А из прямоугольного треугольника ABH имеем $AH = x\operatorname{tg}\alpha$. По условию $AP : PH = 3 : 4$. Подставив найденные выражения, получаем

$$\frac{3}{4} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{-\operatorname{tg} 2\alpha} = -1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{3}{2} \ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Итак, $\angle ABC = \operatorname{arctg} \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Замечание. Нетрудно убедиться, что найденный угол больше 60°, поэтому точка D в самом деле лежит на отрезке AC.

Комментарий. Отношение $AP : PH$ выражено через тригонометрические функции искомого угла — 3 балла;
Отсутствует проверка, что полученный угол больше 60° — баллы не снимаются.