Научно-техническая олимпиада «Старт в науку» 2025-2026 уч. года
Физика
Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Черновики не проверяются.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 5.

Максимальное число баллов за олимпиаду по физике 20.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Во всех задачах верный ответ без обоснования оценивается в **0 баллов**.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении. Баллы за отдельные продвижения суммируются.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается **1 балл**.

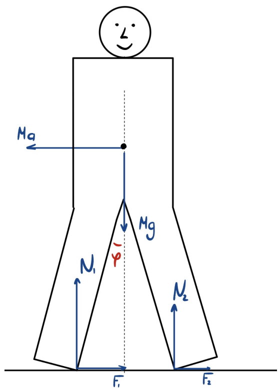
Ф9.1-1 Вася по пути в школу не успел занять свободное место в автобусе. Чтобы не упасть во время равноускоренного движения автобуса он расставил ноги на угол $2\varphi = 90°$. При этом Вася едва устоял на ногах и начал проскальзывать назад. Определите, с каким ускорением двигался автобус и коэффициент трения ног Васи о пол, если масса и длина его тела без учёта ног $m_0 = 40$ кг и $h = 80$ см, а масса и длина каждой ноги соответственно $m = 15$ кг и $l = 90$ см.

Ответ. $\mu = 0,66$.

Решение. Центр масс Васи окажется на высоте:

$$H = \frac{m_0(h + lcos\varphi) + 2 \cdot \frac{1}{2}mlcos\varphi}{m_0 + 2m}$$

Расставим силы, действующие на Васю в системе отчета автобуса. Так как автобус движется с ускорением, на Васю будет действовать инерциальная сила ma, приложенная к центру масс системы.



Второй закон Ньютона запишется как:

$$N_1 + N_2 = (m_0 + 2m)g$$

$$Ma = F_1 + F_2$$

Уравнение моментов относительно центральной точки между ног Васи:

$$N_2 \cdot 2lsin\varphi + (m_0 + 2m)a \cdot H = (m_0 + 2m)g \cdot lsin\varphi$$

Так как Вася «едва устоял на ногах», передняя нога начинает отрыв $N_2 = 0$, а в силу того, что он начал проскальзывать, сила трения $F_1 = \mu N_1 = \mu(m_0 + 2m)g$. С учетом чего получаем:

$$(m_0 + 2m)glsin\varphi = MaH$$

$$a = \frac{(m_0 + 2m)lsin\varphi}{(m_0 + 2m)H}g = \frac{(m_0 + 2m)lsin\varphi}{m_0(h + lcos\varphi) + mlcos\varphi}g$$

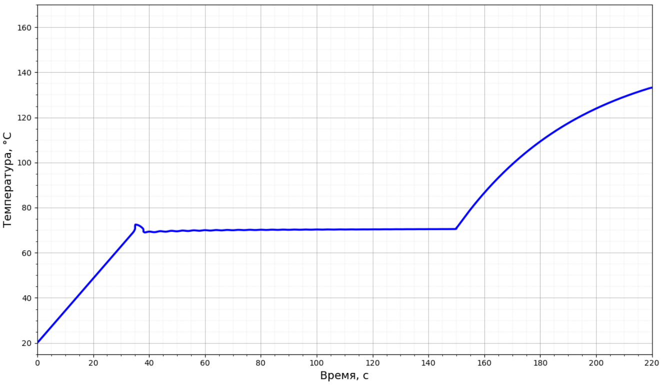
$$\mu Mg = Ma$$

$$\mu = \frac{a}{g} = \frac{(m_0 + 2m)lsin\varphi}{m_0(h + lcos\varphi) + mlcos\varphi}$$

Критерии оценивания.
Высота центра масс Васи — 1 балл.
Второй закон Ньютона для васи — 1 балл.

Правило моментов для Васи — 1 балл.
Правильный учёт силы трения и силы реакции опоры — 1 балл.
Итоговое выражение и ответ — 1 балл.

Ф9.2-1 Современные огнеупорные материалы работают по следующему принципу. Паста на основе органического связующего наносится на металлическую подложку толщиной $h = 5$ мм и плотностью $\rho = 1200$ кг/м^3. При нагревании паста начинает кипеть и вспениваться, образуя пористую корку с очень низкой теплопроводностью. Подложку с пастой помещают на нагреватель, который поддерживает постоянную температуру $T_2 = 250°$C. Тыльная сторона подложки контактирует с воздухом при комнатной температуре $T_0 = 20°$C. С помощью термопары измеряют температуру тыльной стороны $T(t)$ от времени. Полученный график приведён на рисунке.



Известно, что до момента времени $t_1 = 35$ с температура тыльной стороны росла практически линейно, а затем начался процесс кипения пасты при температуре $T_{\text{кип}} = 70°$C. Кипение закончилось в момент $t_2 = 150$ с, после чего начался нагрев уже сухой пористой подложки. Удельная теплоёмкость материала подложки $c = 1000$ Дж/(кг·К), толщина слоя пасты $\delta = 2$ мм, её плотность $\rho_{\text{п}} = 1000$ кг/м^3.

1. Найдите коэффициент теплоотдачи α от нагревателя к подложке в законе Ньютона–Рихмана.
2. Определите удельную теплоту парообразования L пасты, считая, что в процессе кипения вся подводимая теплота тратится на испарение связующего.

Ответ. $\alpha \approx 37$ Вт/(м$^2 \cdot$ К), $\quad L \approx 386$ кДж/кг

Решение. На начальном участке $(0 < t < t_1)$ температура подложки растёт линейно, что позволяет найти скорость нагрева:

$$v = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T_{\text{кип}} - T_0}{t_1} = \frac{70 - 20}{35} = \frac{50}{35} \approx 1,43 \text{ К/с}$$

В начальный момент времени $(t \to 0)$ температура подложки близка к T_0, поэтому тепловой поток от нагревателя максимален и определяется законом Ньютона–Рихмана:

$$q = \alpha(T_2 - T_0)$$

С другой стороны, этот поток идёт на нагрев подложки. Для единицы площади ($S = 1$ м^2) масса подложки:

$$m/S = \rho h = 1200 \cdot 0,005 = 6 \text{ кг/м}^2$$

Уравнение теплового баланса в начальный момент:

$$cmv = \alpha(T_2 - T_0)$$

Отсюда выражаем α:

$$\alpha = \frac{cmv}{T_2 - T_0} = \frac{1000 \cdot 6 \cdot 1,43}{250 - 20} = \frac{8580}{230} \approx 37,3 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$$

Во время кипения (от t_1 до t_2) температура подложки практически постоянна и равна $T_{\text{кип}}$. Тепловой поток от нагревателя:

$$q_{\text{кип}} = \alpha(T_2 - T_{\text{кип}}) = 37,3 \cdot (250 - 70) = 37,3 \cdot 180 \approx 6714 \text{ Вт/м}^2$$

Полное количество теплоты, подведённое за время кипения $\Delta t_{\text{кип}} = t_2 - t_1 = 150 - 35 = 115$ с (на единицу площади):

$$Q_{\text{кип}} = q_{\text{кип}} \cdot \Delta t_{\text{кип}} = 6714 \cdot 115 \approx 772\,110 \text{ Дж/м}^2$$

Эта теплота пошла на испарение пасты. Масса пасты на единицу площади:

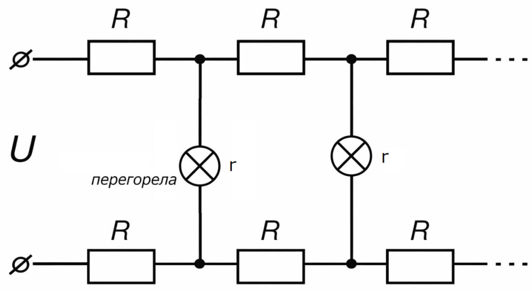
$$m_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} \cdot \delta = 1000 \cdot 0,002 = 2 \text{ кг/м}^2$$

Тогда удельная теплота парообразования:

$$L = \frac{Q_{\text{кип}}}{m_{\text{п}}} = \frac{772\,110}{2} \approx 386\,055 \text{ Дж/кг} \approx 386 \text{ кДж/кг}$$

Критерии оценивания.
Определение скорости нагрева на начальном участке — 1 балл.
Запись уравнения теплового баланса для начального момента — 1 балл.
Вычисление коэффициента теплоотдачи α — 1 балл.
Определение теплового потока и теплоты кипения — 1 балл.
Вычисление удельной теплоты парообразования — 1 балл.

Ф9.3-1 Для новогодних декораций используют гирлянду, составленную из огромного количества лампочек. Схема гирлянды представлена ниже: лампочки имеют сопротивление $r = 20$ Ом, а резисторы вдоль – сопротивления проводов – $R = 5$ Ом. Лампочек настолько много, что схему можно считать бесконечной. Однако первая лампочка перегорела и стала мигать, а ее сопротивление стало меняться так, что в произвольный момент времени оно с вероятностью 75 % имеет сопротивление r, а с вероятностью 25 % соответствует разрыву цепи. Гирлянда подключена к источнику $U = 12$ В. Найдите среднюю мощность, потребляемую гирляндой.



Ответ. $\langle P \rangle = 6.6$ Вт.

Решение. Нетрудно получить, что сопротивление бесконечной цепочки из исправных лампочек и проводов составляет

$$R_{eq} = R + \sqrt{R^2 + 2rR} = 20 \text{ Ом}.$$

Мощность в случае, когда лампочка в первом звене работает, равна

$$P_1 = U^2 \frac{1}{2R + \frac{rR_{eq}}{r+R_eq}} = 7.2 \text{ Вт}.$$

Мощность в случае, когда разрыв:

$$P_2 = U^2 \frac{1}{2R + R_{eq}} = 4.8 \text{ Вт}.$$

Поэтому средняя мощность равна $\langle P\rangle = 0.75P_1 + 0.25P_2 = 6.6$ Вт.

Критерии оценивания.

Сопротивление бесконечной цепочки — 2 балла.

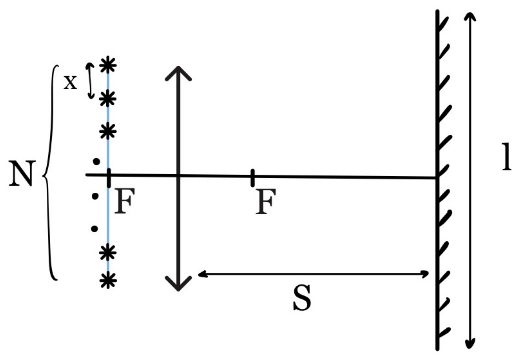
Верно записана средняя мощность через вероятности — 1 балл.

Получено итоговое выражение — 1 балл.

Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф9.4-1 Для освещения архитектурных объектов, картин, памятников и сцен для выступлений используют светодиодные прожекторы. Схема их устройства достаточно проста: в фокальной плоскости собирающей линзы в ряд с постоянным интервалом выставляются светодиоды, после чего выставляется сама линза. Представим что у нас есть картина ширины $l = 1,2$ м, находящаяся на расстоянии $S = 0,5$ м от линзы прожектора и требующая освещения. Считая длину линзы прожектора равной $d = 6$ см, а ее фокусное расстояние равным $F = 4$ см, определите минимальное количество светодиодов необходимое для полного освещения сцены. Определите длину интервала между светодиодами.

Примечание: светодиоды считать точечными источниками света, их размерами пренебречь. Схема расположения картины и прожектора показана на рисунке



Ответ. $N = 20$ штук, $a = 4,8$ мм.

Решение. Так как светодиоды находятся на фокальной плоскости и размер изображения никак не меняется от сдвига светодиода по вертикали относительно фокальной плоскости, можно сделать вывод, что размер участка освещенного одним светодиодом будет одинаков вне зависимости от его положения и равен диаметру линзы. Последний вывод объясняется рассмотрением источника на главной оптической оси (ГОО), он будет находиться в фокусе линзы и его преломленные лучи будут идти параллельно ГОО, следовательно размер освещенного пятна будет ограничен лишь размерами линзы. Отсюда найдем минимальное количество светодиодов:

$$N = \frac{l}{d} = \frac{120}{6} = 20 \text{ штук}$$

Рассмотрим два светодиода. Первый расположим в фокусе, второй сдвинем по вертикали вверх на расстояние x. Лучи, проходящие через оптический центр линзы не преломятся и попадут в центр освещенного участка, то есть будут однозначно задавать положение целого освещенного участка. Так как луч исходящий из первого светодиода будет являться главной оптической осью, а луч исохдящий из второго светодиода не преломится, по тангенсу угла наклона можно определить смещение центра освещенного участка, которое должно равняться длине линзы из условий минимальности количества светодиодов:

$$tg\ \varphi = \frac{x}{F} = \frac{d}{S}$$

$$x = \frac{dF}{S} = \frac{6 \cdot 4}{50} = 0,48 \text{ см} = 4,8 \text{ мм}$$

Критерии оценивания.
Рассчитан размер освещенного участка — 1 балл.
Определено минимальное количество светодиодов — 1 балл.
Из построений/тангенса угла наклона/подобия треугольников записано отношение смещения светодиодов к смещению освещенных участков — 1 балл.
Сказано, что расстояние между освещенными участками равняется длине линзы — 1 балл.
Получено выражение для интервала между светодиодами — 1 балл.

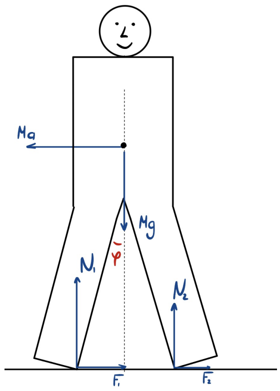
Ф9.1-2 Вася по пути в школу не успел занять свободное место в автобусе. Чтобы не упасть во время равноускоренного движения автобуса он расставил ноги на угол $2\varphi = 60°$. При этом Вася едва устоял на ногах и начал проскальзывать назад. Определите, с каким ускорением двигался автобус и коэффициент трения ног Васи о пол, если масса и длина его тела без учёта ног $m_0 = 30$ кг и $h = 70$ см, а масса и длина каждой ноги соответственно $m = 10$ кг и $l = 60$ см.

Ответ. $\mu = 0,36$.

Решение. Центр масс Васи окажется на высоте:

$$H = \frac{m_0(h + lcos\varphi) + 2 \cdot \frac{1}{2} mlcos\varphi}{m_0 + 2m}$$

Расставим силы, действующие на Васю в системе отчета автобуса. Так как автобус движется с ускорением, на Васю будет действовать инерциальная сила ma, приложенная к центру масс системы.



Второй закон Ньютона запишется как:

$$N_1 + N_2 = (m_0 + 2m)g$$

$$(m_0 + 2m)a = F_1 + F_2$$

Уравнение моментов относительно центральной точки между ног Васи:

$$N_2 \cdot 2lsin\varphi + (m_0 + 2m)a \cdot H = (m_0 + 2m)g \cdot lsin\varphi$$

Так как Вася «едва устоял на ногах», передняя нога начинает отрыв $N_2 = 0$, а в силу того, что он начал проскальзывать, сила трения $F_1 = \mu N_1 = \mu(m_0 + 2m)g$. С учетом чего получаем:

$$(m_0 + 2m)glsin\varphi = (m_0 + 2m)aH$$

$$a = \frac{(m_0 + 2m)lsin\varphi}{(m_0 + 2m)H} g = \frac{(m_0 + 2m)lsin\varphi}{m_0(h + lcos\varphi) + mlcos\varphi} g$$

$$\mu(m_0 + 2m)g = (m_0 + 2m)a$$

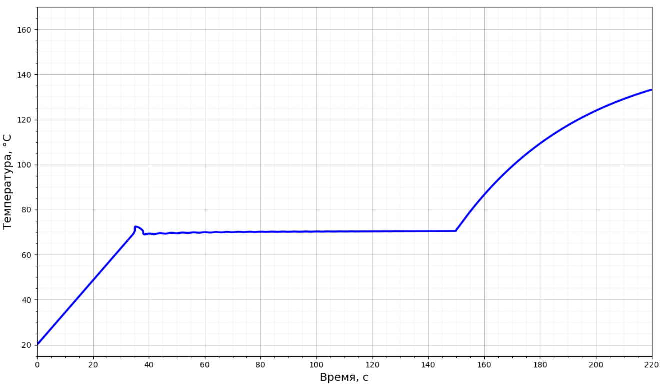
$$\mu = \frac{a}{g} = \frac{(m_0 + 2m)lsin\varphi}{m_0(h + lcos\varphi) + mlcos\varphi}$$

Критерии оценивания.
Высота центра масс Васи — 1 балл.
Второй закон Ньютона для васи — 1 балл.
Правило моментов для Васи — 1 балл.

Правильный учёт силы трения и силы реакции опоры — 1 балл.
Итоговое выражение и ответ — 1 балл.

Ф9.2-2 Современные огнеупорные материалы работают по следующему принципу. Паста на основе органического связующего наносится на металлическую подложку толщиной $h = 6$ мм и плотностью $\rho = 1300$ кг/м^3. При нагревании паста начинает кипеть и вспениваться, образуя пористую корку с очень низкой теплопроводностью. Подложку с пастой помещают на нагреватель, который поддерживает постоянную температуру $T_2 = 280°$C. Тыльная сторона подложки контактирует с воздухом при комнатной температуре $T_0 = 20°$C. С помощью термопары измеряют температуру тыльной стороны $T(t)$ от времени. Полученный график приведён на рисунке.

Известно, что до момента времени $t_1 = 35$ с температура тыльной стороны росла практически линейно, а затем начался процесс кипения пасты при температуре $T_{\text{кип}} = 70°$C. Кипение закончилось в момент $t_2 = 150$ с, после чего начался нагрев уже сухой пористой подложки. Удельная теплоёмкость материала подложки $c = 1100$ Дж/(кг·К), толщина слоя пасты $\delta = 2,5$ мм, её плотность $\rho_{\text{п}} = 1100$ кг/м^3.



1. Найдите коэффициент теплоотдачи α от нагревателя к подложке в законе Ньютона–Рихмана.

2. Определите удельную теплоту парообразования L пасты, считая, что в процессе кипения вся подводимая теплота тратится на испарение связующего.

Ответ. $\alpha \approx 47$ Вт/(м$^2 \cdot$ К), $\quad L \approx 415$ кДж/кг

Решение. На начальном участке $(0 < t < t_1)$ температура подложки растёт линейно:

$$v = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T_{\text{кип}} - T_0}{t_1} = \frac{70 - 20}{35} = \frac{50}{35} \approx 1,43 \text{ К/с}$$

Масса подложки на единицу площади:

$$m/S = \rho h = 1300 \cdot 0,006 = 7,8 \text{ кг/м}^2$$

Коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha = \frac{cmv}{T_2 - T_0} = \frac{1100 \cdot 7,8 \cdot 1,43}{280 - 20} = \frac{1100 \cdot 7,8 \cdot 1,43}{260} = \frac{12269,4}{260} \approx 47,2 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$$

Тепловой поток во время кипения:

$$q_{\text{кип}} = \alpha(T_2 - T_{\text{кип}}) = 47,2 \cdot (280 - 70) = 47,2 \cdot 210 \approx 9912 \text{ Вт/м}^2$$

Время кипения: $\Delta t_{\text{кип}} = t_2 - t_1 = 150 - 35 = 115$ с

$$Q_{\text{кип}} = q_{\text{кип}} \cdot \Delta t_{\text{кип}} = 9912 \cdot 115 = 1\,139\,880 \text{ Дж/м}^2$$

Масса пасты на единицу площади:

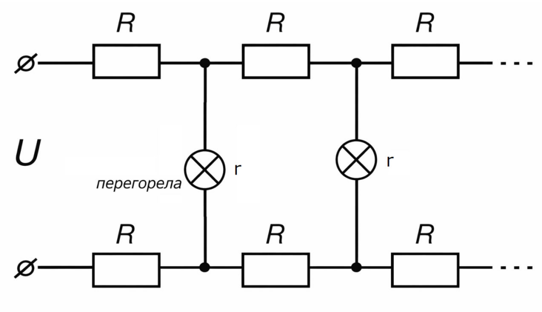
$$m_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} \cdot \delta = 1100 \cdot 0,0025 = 2,75 \text{ кг/м}^2$$

Удельная теплота парообразования:

$$L = \frac{Q_{\text{кип}}}{m_{\text{п}}} = \frac{1\,139\,880}{2,75} \approx 414\,502 \text{ Дж/кг} \approx 415 \text{ кДж/кг}$$

Критерии оценивания.
Определение скорости нагрева на начальном участке — 1 балл.
Запись уравнения теплового баланса для начального момента — 1 балл.
Вычисление коэффициента теплоотдачи α — 1 балл.
Определение теплового потока и теплоты кипения — 1 балл.
Вычисление удельной теплоты парообразования — 1 балл.

Ф9.3-2 Для новогодних декораций используют гирлянду, составленную из огромного количества лампочек. Схема гирлянды представлена ниже: лампочки имеют сопротивление $r = 15$ Ом, а резисторы вдоль – сопротивления проводов – $R = 5$ Ом. Лампочек настолько много, что схему можно считать бесконечной. Однако первая лампочка перегорела и стала мигать, а ее сопротивление стало меняться так, что в произвольный момент времени оно с вероятностью 75 % имеет сопротивление r, а с вероятностью 25 % соответствует разрыву цепи. Гирлянда подключена к источнику $U = 20$ В. Найдите среднюю мощность, потребляемую гирляндой.



Ответ. $\langle P \rangle = 20.00$ Вт.

Решение. Нетрудно получить, что сопротивление бесконечной цепочки из исправных лампочек и проводов составляет

$$R_{eq} = R + \sqrt{R^2 + 2rR} = 18.23 \text{ Ом}.$$

Мощность в случае, когда лампочка в первом звене работает равна

$$P_1 = U^2 \frac{1}{2R + \frac{rR_{eq}}{r+R_{eq}}} = 21.94 \text{ Вт}.$$

Мощность в случае, когда разрыв:

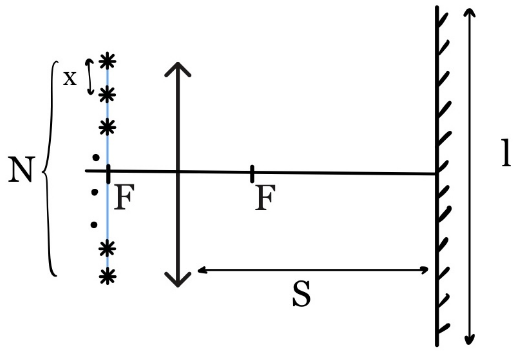
$$P_2 = U^2 \frac{1}{2R + R_{eq}} = 14.17 \text{ Вт}.$$

Поэтому средняя мощность равна $\langle P \rangle = 0.75P_1 + 0.25P_2 = 20.00$ Вт.

Критерии оценивания.
Сопротивление бесконечной цепочки — 2 балла.
Верно записана средняя мощность через вероятности — 1 балл.
Получено итоговое выражение — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф9.4-2 Для освещения архитектурных объектов, картин, памятников и сцен для выступлений используют светодиодные прожекторы. Схема их устройства достаточно проста: в фокальной плоскости собирающей линзы в ряд с постоянным интервалом выставляются светодиоды, после

чего выставляется сама линза. Представим что у нас есть картина ширины $l = 2,4$ м, находящаяся на расстоянии $S = 1$ м от линзы прожектора и требующая освещения. Считая длину линзы прожектора равной $d = 8$ см, а ее фокусное расстояние равным $F = 5$ см, определите минимальное количество светодиодов необходимое для полного освещения сцены. Так же определите длину интервала между светодиодами.
Примечание: светодиоды считать точечными источниками света, их размерами пренебречь. Схема расположения картины и прожектора показана на рисунке



Ответ. $N = 30$ штук, $a = 4$ мм.

Решение. Так как светодиоды находятся на фокальной плоскости и размер изображения никак не меняется от сдвига светодиода по вертикали относительно фокальной плоскости, можно сделать вывод, что размер участка освещенного одним светодиодом будет одинаков вне зависимости от его положения и равен диаметру линзы. Последний вывод объясняется рассмотрением источника на главной оптической оси (ГОО), он будет находиться в фокусе линзы и его преломленные лучи будут идти параллельно ГОО, следовательно размер освещенного пятна будет ограничен лишь размерами линзы. Отсюда найдем минимальное количество светодиодов:

$$N = \frac{l}{d} = \frac{240}{8} = 30 \text{ штук}$$

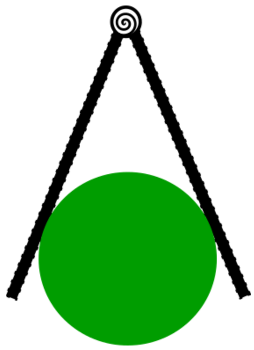
Рассмотрим два светодиода. Первый расположим в фокусе, второй сдвинем по вертикали вверх на расстояние x. Лучи, проходящие через оптический центр линзы не преломятся и попадут в центр освещенного участка, то есть будут однозначно задавать положение целого освещенного участка. Так как луч исходящий из первого светодиода будет являться главной оптической осью, а луч исходящий из второго светодиода не преломится, по тангенсу угла наклона можно определить смещение центра освещенного участка, которое должно равняться длине линзы из условий минимальности количества светодиодов:

$$tg\ \varphi = \frac{x}{F} = \frac{d}{S}$$

$$x = \frac{dF}{S} = \frac{8 \cdot 5}{100} = 0,4 \text{ см} = 4 \text{ мм}$$

Критерии оценивания.
Рассчитан размер освещенного участка — 1 балл.
Определено минимальное количество светодиодов — 1 балл.
Из построений/тангенса угла наклона/подобия треугольников записано отношение смещения светодиодов к смещению освещенных участков — 1 балл.
Сказано, что расстояние между освещенными участками равняется длине линзы — 1 балл.
Получено выражение для интервала между светодиодами — 1 балл.

Ф10.1-3 Захватный механизм роборуки представляет собой две шероховатых квадратных пластинки стороной $a = 18$ см и массой $M = 200$ г, соединённых общей осью по одной из сторон и связанных торсионной пружиной, сжимающей пластинки между собой. Пружина создаёт момент $k\varphi$, где φ – угол между пластинками, $k = 3$ Н·м – коэффициент жесткости пружины. С помощью пластинок поднимают зелёное сферическое яблоко, радиусом $R = 6$ см и массой $m = 450$ г. Точка контакта яблока и пластинки находится на расстоянии 12 см от оси. При каком минимальном коэффициенте трения резинового покрытия пластинок о яблоко возможно его поднять?



Ответ. 1.09

Решение.
Запишем правило моментов, действующее на одну из пластин захвата.

$$N\frac{2}{3}a = Mg\frac{a}{2}\sin\varphi/2 + k\varphi.$$

Записав силы, действующие на яблоко, получим

$$mg + 2N\sin\varphi/2 \leq 2\mu N\cos\varphi/2.$$

Выразив из правила моментов силу реакции опоры, а из геометрии синус и косинус и само значение угла $\varphi/2$, получим ответ.

$$\mu \geq \frac{mg + \frac{3}{4}Mg + \frac{\pi k}{a}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}Mg + \frac{\pi k}{a}} \approx 1.09$$

Примечание: резина адгезивный материалл и с органикой может иметь коэффициент трения больше чем единица.

Критерии оценивания.
Правило моментов для одной пластины захвата — 1 балл.
Условие равновесия сил, действующей на яблоко — 2 балла.
Оценка сверху для силы трения — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф10.2-3 Для получения водных и спиртовых экстрактов в косметической промышленности часто используют роторный испаритель. Принцип его работы следующий: круглодонная вращающаяся колба с растворителем помещается в водяную баню с температурой $T_0 = 47°C$, она же герметично соединена со второй пустой колбой и холодильником, через который проходит поток воды с температурой $T_1 = 24°C$. В начальный момент времени давление $P_0 = 0{,}4P_{атм}$ в системе поддерживается с помощью насоса. Какую максимальную долю растворителя (гексана) при его кипении можно сконденсировать во второй колбе? Зависимость давления насыщенных паров от температуры для гексана приведена на рисунке. Объем холодильника $V_х = 3$л, объем системы $V = 20$л.

Ответ. $\eta_{\max}^{(1)} \approx 92\%$.

Решение. Количество пара в начале (весь объём V):

$$n_0 = \frac{P_0 V}{RT_{\text{кип}}}.$$

Температура кипения гексана определяется по графику. При давлении $P_0 = 0{,}4 P_{\text{атм}}$ гексан кипит при температуре $T_{\text{кип}} = 315$ K.

Остаточный пар после конденсации (только в объёме холодильника V_x):

$$n_1 = \frac{P_{\text{нп}}(T_1) V_x}{RT_1}.$$

Давление насыщенных паров при температуре $T_1 = 24°C = 297,15$ K определяем по графику: $P_{\text{нп}}(T_1) = 0{,}2 P_{\text{атм}}$.

Доля сконденсированного вещества:

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{n_1}{n_0} = 1 - \frac{P_{\text{нп}}(T_1)}{P_0} \cdot \frac{T_{\text{кип}}}{T_1} \cdot \frac{V_x}{V}.$$

Подставляем числовые значения:

$$\frac{P_{\text{нп}}(T_1)}{P_0} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5, \quad \frac{T_{\text{кип}}}{T_1} = \frac{315}{297,15} \approx 1,06007, \quad \frac{V_x}{V} = \frac{3}{20} = 0,15.$$

$$\eta_{\max} = 1 - 0,5 \cdot 1,06007 \cdot 0,15 = 1 - 0,07950525 = 0,92049475 \approx 92,0\%.$$

Критерии оценивания.

Определение температуры кипения по графику — 1 балл.

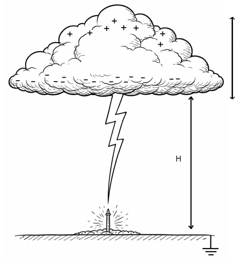
Определение давления насыщенных паров при $T_1 = 24°C$ — 1 балла.

Запись выражения для начального количества вещества — 1 балла.

Запись выражения для остаточного пара — 1 балл.

Вывод итоговой формулы и правильный ответ — 1 балл.

Ф10.3-3 В грозовом облаке при столкновении ледяных кристаллов под действием воздушных потоков происходит разделение зарядов. Положительно заряженные частицы уносятся вверх, а отрицательно заряженные оседают, формируя тонкие заряженные области в форме дисков. Небольшой молниеотвод, расположенный прямо под грозовым облаком, оборудован датчиком напряженности электрического поля. Он зафиксировал напряженность электрического поля $E = 3$ кВ/м. Облако расположено на высоте $H = 6$ км над землей, имеет радиус $R = 2.5$ км и высоту $h = 1$ км. Рассчитайте электрическую энергию зарядов в облаке. Для оценки Землю считайте идеальным проводником и пренебрегайте краевыми эффектами.



Ответ. $W = 905$ МДж

Решение. Земля - идеальный заземленный проводник. Потому напряженность электрического поля у поверхности земли - это композиция полей заряда от облака и заряда-изображения. Напряженность поля на оси диска:

$$E(z) = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

Поэтому,

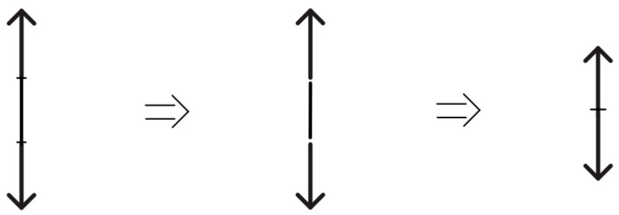
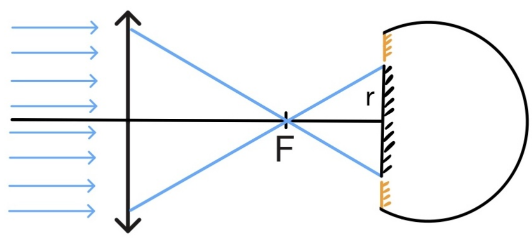
$$E' = \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0}\left(\frac{H}{\sqrt{H^2 - R^2}} - \frac{H + h}{\sqrt{(H+h)^2 - R^2}}\right)$$

Отсюда находим заряд диска $Q = 17.7$ Кл. А электрическая энергия внутри облака:

$$W = \frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 \pi R^2} = 905 \text{ МДж}$$

Критерии оценивания.
Записано электрическое поле на оси диска — 2 балла.
Использован метод изображений — 1 балл.
Верное выражение для энергии облака (или любая другая верная оценка) — 1 балл.
Получен верный ответ — 1 балл.

Ф10.4-3 Для хорошей фотографии радужной оболочки глаз нужно правильно осветить, то есть полностью осветить радужную оболочку, при этом не попав светом в зрачок и не травмировав сетчатку глаза. Для этого используется билинза Бийе. Чтобы ее сделать, необходимо вырезать сердцевину тонкой собирающей линзы и склеить два оставшихся кусочка между собой, как это схематично показано на рисунке слева. Глаз освещают параллельным пучком лучей. Определите длину вырезанной части линзы, если длина целой линзы $l = 1,2$ см, радиус зрачка $r = 3$ мм, а до разрезания линзы поверхность глаза находится на таком расстоянии от линзы, что вся поверхность зрачка освещена, а на радужку свет не попадает. Считать что поверхность глаза является прямой и параллельна оси линзы. Ход лучей через линзу до ее разрезания показан на справа.

Ответ. 4 мм.

Решение. Представим линзу Бийе, как суперпозицию двух собирающих линз длины l, сдвинутых друг относительно друга. Красным на рисунке показана мнимая часть линзы и ее мнимая главная оптическая ось. На рисунке показан крайний случай, когда нижняя часть радужки освещена. Для второй половинки линзы рисунок будет аналогичным, только перевернутым.

Из подобия треугольников найдем расстояние от фокуса до глаза a:

$$\frac{l/2}{F} = \frac{r}{a}$$

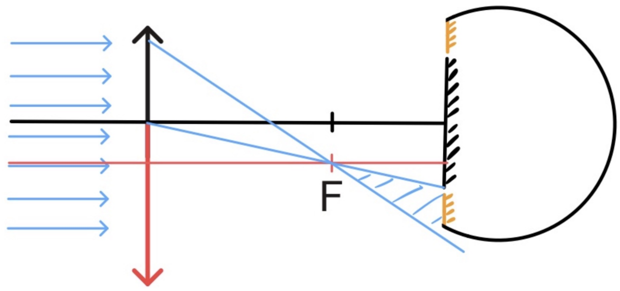


Рис. 1: Критический случай освещения радужки

$$a = \frac{2rF}{l}$$

Из рисунка и подобия треугольников найдем сдвиг линзы d:

$$\frac{d}{F} = \frac{r}{F+a}$$

$$d = \frac{rF}{F+a} = \frac{r}{1+2r/l} = 2 \text{ мм}$$

Так как каждая из линз сдвинута на d, искомая длина вырезанной части равна $x = 2d = 4$ мм

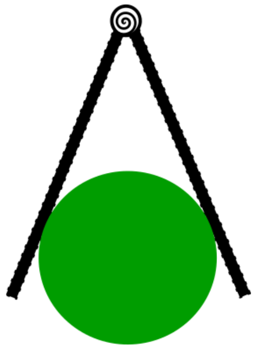
Критерии оценивания.

Приведена идея использования суперпозиции двух линз или правильно нарисован рисунок хода лучей из разумных соображений — 2 балла.

Найдено расстояние от глаза до фокуса или линзы — 1 балл.

Найдено расстояние сдвига линзы — 1 балл.

Получено итоговый ответ — 1 балл.



Ф10.1-4 Захватный механизм роборуки представляет собой две шероховатых квадратных пластинки стороной $a = 15$ см и массой $M = 300$ г, соединённых общей осью по одной из сторон и связанных торсионной пружиной, сжимающей пластинки между собой. Пружина создаёт момент $k\varphi$, где φ – угол между пластинками, $k = 2$ Н·м – коэффициент жесткости пружины. С помощью пластинок поднимают зелёное сферическое яблоко, радиусом $R = 5$ см и массой $m = 400$ г. Точка контакта яблока и пластинки находится на расстоянии 10 см от оси. При каком минимальном коэффициенте трения резинового покрытия пластинок о яблоко возможно его поднять?

Ответ. 1.1

Решение.
Запишем правило моментов, действующее на одну из пластин захвата.

$$N\frac{2}{3}a = Mg\frac{a}{2}\sin\varphi/2 + k\varphi.$$

Записав силы, действующие на яблоко, получим

$$mg + 2N\sin\varphi/2 \leq 2\mu N\cos\varphi/2.$$

Выразив из правила моментов силу реакции опоры, а из геометрии синус и косинус и само значение угла $\varphi/2$, получим ответ.

$$\mu \geq \frac{mg + \frac{3}{4}Mg + \frac{\pi k}{a}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}Mg + \frac{\pi k}{a}} \approx 1.1$$

Примечание: резина адгезивный материалл и с органикой может иметь коэффициент трения больше чем единица.

Критерии оценивания.
Правило моментов для одной пластины захвата — 1 балл.
Условие равновесия сил, действующей на яблоко — 2 балла.
Оценка сверху для силы трения — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф10.2-4 Для получения водных и спиртовых экстрактов в косметической промышленности часто используют роторный испаритель. Принцип его работы следующий: круглодонная вращающаяся колба с растворителем помещается в водяную баню с температурой $T_0^{(2)} = 67°C$, она же герметично соединена со второй пустой колбой и холодильником, через который проходит поток воды с температурой $T_1 = 24°C$. В начальный момент времени давление $P_0^{(2)} = 0{,}8P_{\text{атм}}$ в системе поддерживается с помощью насоса. Какую максимальную долю растворителя (гексана) при его кипении можно сконденсировать во второй колбе? Зависимость давления насыщенных паров от температуры для гексана приведена на рисунке. Объем холодильника $V_{\text{х}} = 3$л, объем системы $V = 20$л.

Ответ. $\eta^{(2)}_{\max} \approx 96\%$.

Решение. Количество пара в начале (весь объём V):

$$n_0^{(2)} = \frac{P_0^{(2)} V}{RT^{(2)}_{\text{кип}}}.$$

Согласно графику при давлении $P_0^{(2)} = 0{,}8P_{\text{атм}}$ гексан кипит при температуре $T^{(2)}_{\text{кип}} = 335$ К.
Остаточный пар после конденсации (только в объёме холодильника V_x):

$$n_1^{(2)} = \frac{P_{\text{нп}}(T_1) V_x}{RT_1}.$$

Давление насыщенных паров при $T_1 = 24°C$: $P_{\text{нп}}(T_1) = 0{,}2P_{\text{атм}}$.
Доля сконденсированного вещества:

$$\eta^{(2)}_{\max} = 1 - \frac{n_1^{(2)}}{n_0^{(2)}} = 1 - \frac{P_{\text{нп}}(T_1)}{P_0^{(2)}} \cdot \frac{T^{(2)}_{\text{кип}}}{T_1} \cdot \frac{V_x}{V}.$$

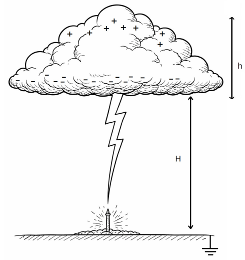
Подставляем числовые значения:

$$\frac{P_{\text{нп}}(T_1)}{P_0^{(2)}} = \frac{0,2}{0,8} = 0,25, \quad \frac{T^{(2)}_{\text{кип}}}{T_1} = \frac{342}{297,15} \approx 1,127, \quad \frac{V_x}{V} = \frac{3}{20} = 0,15.$$

$$\eta^{(2)}_{\max} = 1 - 0,25 \cdot 1,127 \cdot 0,15 = 1 - 0,0423 = 0,9577 \approx 95,7\%.$$

Критерии оценивания.
Определение температуры кипения по графику — 1 балл.
Определение давления насыщенных паров при $T_1 = 24°C$ — 1 балла.
Запись выражения для начального количества вещества — 1 балла.
Запись выражения для остаточного пара — 1 балл.
Вывод итоговой формулы и правильный ответ — 1 балл.

Ф10.3-4 В грозовом облаке при столкновении ледяных кристаллов под действием воздушных потоков происходит разделение зарядов. Положительно заряженные частицы уносятся вверх, а отрицательно заряженные оседают, формируя тонкие заряженные области в форме дисков. Небольшой молниеотвод, расположенный прямо под грозовым облаком, оборудован датчиком напряженности электрического поля. Он зафиксировал напряженность электрического поля $E = 4$ кВ/м. Облако расположено на высоте $H = 6$ км над землей, имеет радиус $R = 2.5$ км и высоту $h = 0.8$ км. Рассчитайте электрическую энергию зарядов в облаке. Для оценки Землю считайте идеальным проводником и пренебрегайте краевыми эффектами.



Ответ. $W = 1818$ МДж

Решение. Земля - идеальный заземленный проводник. Потому напряженность электрического поля у поверхности земли - это композиция полей заряда от облака и заряда-изображения. Напряженность поля на оси диска:

$$E(z) = \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

Поэтому,

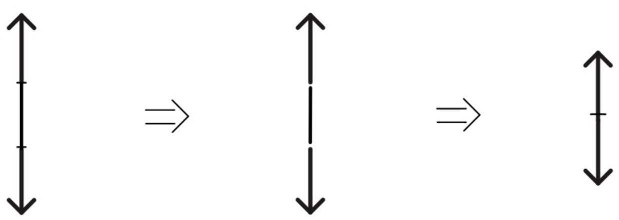
$$E' = \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0}\left(\frac{H}{\sqrt{H^2 - R^2}} - \frac{H+h}{\sqrt{(H+h)^2 - R^2}}\right)$$

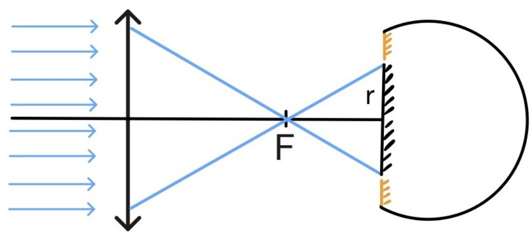
Отсюда находим заряд диска $Q = 28.11$ Кл. А электрическая энергия внутри облака:

$$W = \frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 \pi R^2} = 1818 \text{ МДж}$$

Критерии оценивания.
Записано электрическое поле на оси диска — 2 балла.
Использован метод изображений — 1 балл.
Верное выражение для энергии облака (или любая другая верная оценка) — 1 балл.
Получен верный ответ — 1 балл.

Ф10.4-4 Для хорошей фотографии радужной оболочки глаз нужно правильно осветить, то есть полностью осветить радужную оболочку, при этом не попав светом в зрачок и не травмировав сетчатку глаза. Для этого используется билинза Бийе. Чтобы ее сделать, нужно вырезать сердцевину тонкой собирающей линзы и склеить два оставшихся кусочка между собой, как это схематично показано на рисунке слева. Глаз освещают параллельным пучком лучей. Определите длину вырезанной части линзы, если длина целой линзы $l = 1,6$ см, радиус зрачка $r = 2$ мм, а до разрезания линзы поверхность глаза находится на таком расстоянии от линзы, что вся поверхность зрачка освещена, а на радужку свет не попадает. Считать что поверхность глаза является прямой и параллельна оси линзы. Ход лучей через линзу до ее разрезания показан на рисунке справа.





Ответ. $3,2$ мм.

Решение. Представим линзу Бийе, как суперпозицию двух собирающих линз длины l, сдвинутых друг относительно друга. Красным на рисунке показана мнимая часть линзы и ее мнимая главная оптическая ось. На рисунке показан крайний случай, когда нижняя часть радужки освещена. Для второй половинки линзы рисунок будет аналогичным, только перевернутым.
Из подобия треугольников найдем расстояние от фокуса до глаза a:

$$\frac{l/2}{F} = \frac{r}{a}$$

$$a = \frac{2rF}{l}$$

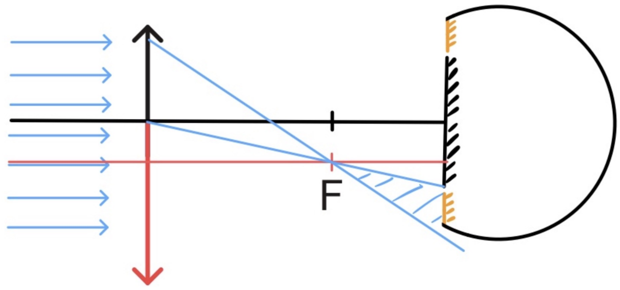


Рис. 2: Критический случай освещения радужки

Из рисунка и подобия треугольников найдем сдвиг линзы d:

$$\frac{d}{F} = \frac{r}{F+a}$$

$$d = \frac{rF}{F+a} = \frac{r}{1+2r/l} = 1,6 \text{ мм}$$

Так как каждая из линз сдвинута на d, искомая длина вырезанной части равна $x = 2d = 3,2$ мм

Критерии оценивания.

Приведена идея использования суперпозиции двух линз или правильно нарисован рисунок хода лучей из разумных соображений — 2 балла.

Найдено расстояние от глаза до фокуса или линзы — 1 балл.

Найдено расстояние сдвига линзы — 1 балл.

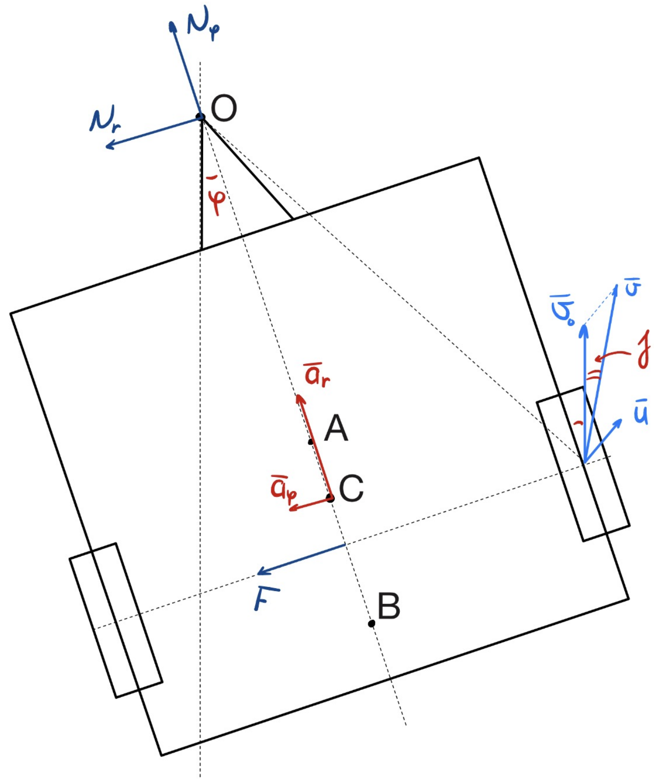
Получено итоговый ответ — 1 балл.

Ф11.1-5 Опытные водители знают: если неправильно разместить груз в прицепе, то на достаточно высокой скорости прицеп начинает самопроизвольно раскачиваться из стороны в сторону, и эти колебания могут даже перевернуть машину. Пусть автомобиль движется с постоянной скоростью v_0, к задней части автомобиля на фаркоп прикреплен прицеп массой $M = 2m$, дно прицепа можно считать квадратом со стороной $2a = 3$ м и моментом инерции $I_0 = \frac{2Ma^2}{3}$. Расстояние от фаркопа до оси колес $L = 2,3$ м. При отклонении продольной оси прицепа от направления движения в шинах возникает сдвиговая жесткость, чья сила имеет вид $F = -k\beta$, где $k > 0$, β - угол между плоскостью колеса и его скоростью, направленная по оси колес. Определите, на каком расстоянии от фаркопа можно расположить груз массой m, чтоб поездка была безопасной.

Примечание: Уравнение типа $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ задает затухающие колебания, если $a, b > 0$

Ответ. $y < 0,45$ м.

Решение. Пусть груз расположен на расстоянии $y = OB$ от фаркопа и прицеп отклонился от положения равновесия на φ. Изобразим силы, действующие на прицеп.



Скорость колеса будет складываться из скорости автомобиля и "поперечной"скорости вращения прицепа вокруг фаркопа:

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{u}$$

где $u = \dot{\varphi}\sqrt{L^2 + H^2}$ - вращение прицепа вокруг фаркопа. При малых углах отклонения φ, скорость $\vec{u}$ можно считать перпендикулярной скорости автомобиля $\vec{v_0}$. Тогда скорость колеса отклонена от направления движения автомобиля на угол:

$$\gamma \approx \frac{\dot{\varphi}\sqrt{L^2 + a^2}}{v_0}$$

А угол между колесами и их скоростью:

$$\beta \approx \varphi + \gamma$$

При этом ускорение центра масс системы $X = OC$:

$$\vec{a} = X\dot{\varphi}^2 \cdot \vec{e_n} + X\ddot{\varphi} \cdot \vec{e_\tau}$$

.

Наконец, запищем второй закон Ньютона и уравнения моментов относительно центра масс системы:

$$F - N_\tau = (M+m)X\ddot{\varphi}$$

$$I\ddot{\varphi} = F(L-X) - N_\tau X$$

где N_τ - сила возникающая в фаркопе и сонаправленная с осью колес, $I_0 = \frac{2Ma^2}{3} + M(a-X)^2 + m(X-y)^2$ - момент инерции системы относительно общего центра масс. Откуда получаем:

$$I\ddot{\varphi} = F(L-X) - (F - (M+m)X\ddot{\varphi})X$$

$$(I - (M+m)X^2)\ddot{\varphi} + k(L-2X)\frac{\sqrt{L^2+a^2}}{v_0}\dot{\varphi} + k(L-2X)\varphi = 0$$

Чтоб полученное уравнение было гармоническим и затухающим необходимо и достаточно условия:

$$L - 2X \leq 0$$

Откуда:

$$X \leq \frac{L}{2}$$

С другой стороны по определению центра масс:

$$X = \frac{Ma + my}{M+m}$$

Окончательно получаем:

$$y \leq \frac{L}{2}\left(\frac{M}{m} + 1\right) - \frac{M}{m}a$$

Критерии оценивания.
Корректно записаны кинематические соотношения — 1 балл.
Корректно составлены уравнения динамики — 1 балла.
Получено дифференциальное уравнение колебаний — 1 балл.
Получено условие устойчивости — 1 балл.
Получен верный ответ — 1 балл.

Ф11.2-5 Гелий при температурах порядка комнатной ведёт себя как идеальный газ только приближённо. Для учёта неидеальности обычно вводят поправку к уравнению состояния идеального газа в следующем виде

$$\frac{PV}{\nu RT} = 1 + \frac{\nu B}{V},$$

где $B = 12$ см^3/моль. В исследовательской лаборатории один моль гелия расширяется под поршнем так, что $P = P_0(1 - V/V_0)$, где $P_0 = 10^6$ Па и $V_0 = 1$ л. С какой точностью необходимо измерять максимальную температуру в процессе, чтобы заметить отличие от идеального газа?

Ответ. 0.7 К

Решение. В данном процессе зависимость давления от объема задаётся следующим выражением $P = P_0(1 - V/V_0)$. Для уравнения состояния в задаче температура выражается следующим образом через объем и давление:

$$T = \frac{PV}{(1 + \nu B/V)\nu R}.$$

Подставляя выражение для объема через давления и обозначая $x = P/P_0$ получим

$$T = \frac{P_0 V_0}{\nu R} \frac{x(1-x)}{\left(1 + \frac{\nu B}{V_0(1-x)}\right)}.$$

Его максимум достигается для $x = 0.5058$. В случае идеального газа максимум достигается для $x = 0.5$. Разница же температур будет равна в таком случае 0.7 К

Критерии оценивания.

Температура корректно выражена через объем и давление — 1 балл.

Найдено давление (или объем) при котором значение температуры будет максимально для идеального газа — 1 балла.

Найдено давление (или объем) при котором значение температуры будет максимально для неидеального газа — 2 балла.

Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф11.3-5 В системах резистивной памяти основным структурным элементом является мемристор – электрический элемент, сопротивление которого зависит от протёкшего по нему заряда. В простейшей модели сопротивление мемристора составляет $R_0 = 200$ Ом при величине протёкшего заряда от 0 до $Q_0 = 1$ мКл и в десять раз меньше если протекло более чем Q_0 заряда. Для создания ячейки памяти мемристор подключили к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 3Q_0/C$, через конденсатор, емкостью $C = 30$ мкФ, и ключ. Найдите при какой минимальной длительности замыкания ключа τ возможна работа ячейки памяти и какая теплота выделится в схеме, если ключ оставить замкнутым надолго?

Ответ. 2.43 мс, 0.15 Дж

Решение. До протекания заряда величиной Q_0 мемристор ведёт себя как обычный резистор. Тогда зависимость заряда на конденсаторе (а значит и протёкшего через мемристор) будет задаваться выражением

$$Q(t) = C\mathcal{E}(1 - \exp(-t/R_0 C)).$$

Отсюда, найдём искомый момент времени:

$$\tau = -R_0 C \ln(1 - Q_0/C\mathcal{E}) = 2.43 \text{ мкс}$$

Через большое время конденсатор зарядится до напряжения $\mathcal{E}$, его энергия будет равна $C\mathcal{E}/2$, соответственно через схему протечёт заряд $C\mathcal{E}$. Значит, работа источника составит $C\mathcal{E}^2$. Из ЗСЭ для электрической цепи выделится теплота $C\mathcal{E}^2/2 = 9Q_0^2/C = 0.15$ Дж.

Критерии оценивания.

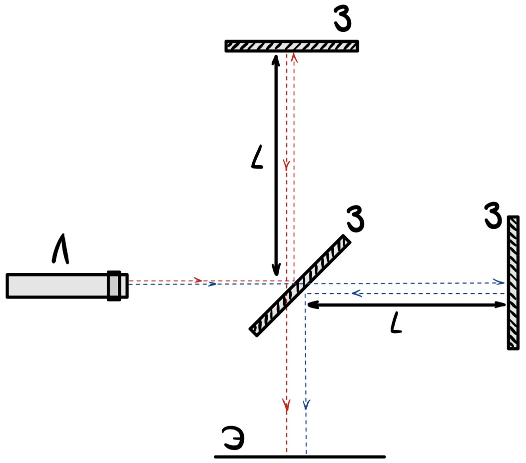
Получена зависимость заряда, протёкшего в схеме, от времени — 2 балл.

Найден искомый момент времени — 1 балл.

Закон сохранения энергии для цепочки — 1 балл.

Итоговое выражение и ответ для теплоты — 1 балл.

Ф11.4-5 Для регистрации чрезвычайно малых деформаций в гравитационно-волновых обсерваториях, например LIGO, используется лазерный интерферометр типа Майкельсона с плечом $L = 200$ м. Упрощенная схема которого представлена на рисунке.



Монохроматический лазер Л с длиной волны $\lambda = 660$ нм, освещает систему зеркал и фокусирует изображение на экране Э. Ход лучей в интерферометре указан на схеме. При проходе гравитационной волны длины плеч изменяются так, что одно плечо растягивается, а второе, перпендикулярное первому, сжимается. В результате на экране проявляется $\Delta m = 15$ дополнительных интерференционных максимумов. Оцените амплитуду относительного растяжения плечей $h = \frac{\Delta L}{L}$ под действием гравитационной волны.

Ответ. $h = 1,24 \cdot 10^{-8}$.

Решение. При проходе волны плечи изменятся как:

$$L_x \approx L(1+h)$$

$$L_y \approx L(1-h)$$

Откуда появится разность хода лучей:

$$\Delta L = 2(L_x - L_y) = 4hL$$

С другой стороны, эта разность хода порождает Δm максимумов. Условие максимума соответствует целым длинам волн:

$$\Delta L = \Delta m \lambda$$

Окончательно получаем:

$$h = \frac{\Delta m \lambda}{4L}$$

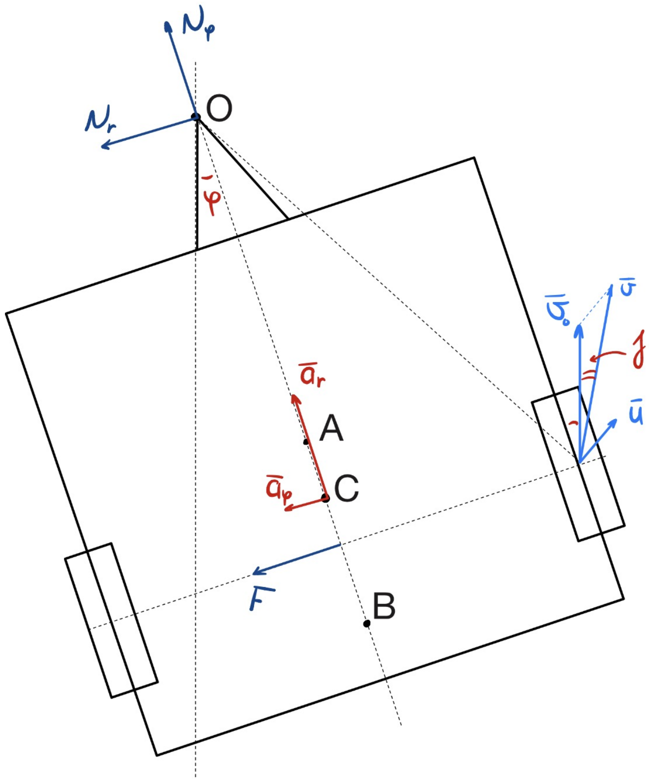
Критерии оценивания.
Установлена связь изменения длин плеч с параметром h — 1 балл.
Записано условие интерференционных максимумов — 1 балл.
Составлено уравнение для определения h — 1 балл.
h найдена в общем виде — 1 балл.
Итоговый ответ — 1 балл.

Ф11.1-6 Опытные водители знают: если неправильно разместить груз в прицепе, то на достаточно высокой скорости прицеп начинает самопроизвольно раскачиваться из стороны в сторону, и эти колебания могут даже перевернуть машину. Пусть автомобиль движется с постоянной скоростью v_0, к задней части автомобиля на фаркоп прикреплен прицеп массой $M = 3m$, дно прицепа можно считать квадратом со стороной $2a = 2$ м и моментом инерции $I_0 = \frac{2Ma^2}{3}$. Расстояние от фаркопа до оси колес $L = 1,7$ м. При отклонении продольной оси прицепа от направления движения в шинах возникает сдвиговая жесткость, чья сила имеет вид $F = -k\beta$, где $k > 0$, β - угол между плоскостью колеса и его скоростью, направленная по оси колес. Определите, на каком расстоянии от фаркопа можно расположить груз массой m, чтоб поездка была безопасной.

Примечание: Уравнение типа $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ задает затухающие колебания, если $a, b > 0$

Ответ. $y < 0,4$ м.

Решение. Пусть груз расположен на расстоянии $y = OB$ от фаркопа и прицеп отклонился от положения равновесия на φ. Изобразим силы, действующие на прицеп.



Скорость колеса будет складываться из скорости автомобиля и "поперечной"скорости вращения прицепа вокруг фаркопа:

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{u}$$

где $u = \dot{\varphi}\sqrt{L^2 + H^2}$ - вращение прицепа вокруг фаркопа. При малых углах отклонения φ, скорость $\vec{u}$ можно считать перпендикулярной скорости автомобиля $\vec{v_0}$. Тогда скорость колеса отклонена от направления движения автомобиля на угол:

$$\gamma \approx \frac{\dot{\varphi}\sqrt{L^2 + a^2}}{v_0}$$

А угол между колесами и их скоростью:

$$\beta \approx \varphi + \gamma$$

При этом ускорение центра масс системы $X = OC$:

$$\vec{a} = X\dot{\varphi}^2 \cdot \vec{e_n} + X\ddot{\varphi} \cdot \vec{e_\tau}$$

.

Наконец, запищем второй закон Ньютона и уравнения моментов относительно центра масс системы:

$$F - N_\tau = (M+m)X\ddot{\varphi}$$

$$I\ddot{\varphi} = F(L-X) - N_\tau X$$

где N_τ - сила возникающая в фаркопе и сонаправленная с осью колес, $I_0 = \frac{2Ma^2}{3} + M(a-X)^2 + m(X-y)^2$ - момент инерции системы относительно общего центра масс. Откуда получаем:

$$I\ddot{\varphi} = F(L-X) - (F - (M+m)X\ddot{\varphi})X$$

$$(I - (M+m)X^2)\ddot{\varphi} + k(L-2X)\frac{\sqrt{L^2+a^2}}{v_0}\dot{\varphi} + k(L-2X)\varphi = 0$$

Чтоб полученное уравнение было гармоническим и затухающим необходимо и достаточно условия:

$$L - 2X \leq 0$$

Откуда:

$$X \leq \frac{L}{2}$$

С другой стороны по определению центра масс:

$$X = \frac{Ma + my}{M+m}$$

Окончательно получаем:

$$y \leq \frac{L}{2}\left(\frac{M}{m} + 1\right) - \frac{M}{m}a$$

Критерии оценивания.
Корректно записаны кинематические соотношения — 1 балл.
Корректно составлены уравнения динамики — 1 балла.
Получено дифференциальное уравнение колебаний — 1 балл.
Получено условие устойчивости — 1 балл.
Получен верный ответ — 1 балл.

Ф11.2-6 Аргон при температурах порядка комнатной ведёт себя как идеальный газ только приближённо. Для учёта неидеальности обычно вводят поправку к уравнению состояния идеального газа в следующем виде

$$\frac{PV}{\nu RT} = 1 + \frac{\nu B}{V},$$

где $B = -21$ см^3/моль. В исследовательской лаборатории один моль аргона расширяется под поршнем так, что $P = P_0(1 - V/V_0)$, где $P_0 = 10^6$ Па и $V_0 = 1$ л. С какой точностью необходимо измерять максимальную температуру в процессе, чтобы заметить отличие от идеального газа?

Ответ. 1.4 К

Решение. В данном процессе зависимость давления от объема задаётся следующим выражением $P = P_0(1 - V/V_0)$. Для уравнения состояния в задаче температура выражается следующим образом через объем и давление:

$$T = \frac{PV}{(1 + \nu B/V)\nu R}.$$

Подставляя выражение для объема через давления и обозначая $x = P/P_0$ получим

$$T = \frac{P_0 V_0}{\nu R} \frac{x(1-x)}{\left(1 + \frac{\nu B}{V_0(1-x)}\right)}.$$

Его максимум достигается для $x = 0.4885$. В случае идеального газа максимум достигается для $x = 0.5$. Разница же температур будет равна 1.4 К

Критерии оценивания.

Температура корректно выражена через объем и давление — 1 балл.

Найдено давление (или объем) при котором значение температуры будет максимально для идеального газа — 1 балла.

Найдено давление (или объем) при котором значение температуры будет максимально для неидеального газа — 2 балла.

Получен правильный ответ — 1 балл.

Ф11.3-6 В системах резистивной памяти основным структурным элементом является мемристор – электрический элемент, сопротивление которого зависит от протёкшего по нему заряда. В простейшей модели сопротивление мемристора составляет $R_0 = 100$ Ом при величине протёкшего заряда от 0 до $Q_0 = 1$ мКл и в десять раз меньше если протекло более чем Q_0 заряда. Для создания ячейки памяти мемристор подключили к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 2Q_0/C$, через конденсатор, емкостью $C = 10$ мкФ, и ключ. Найдите при какой минимальной длительности замыкания ключа τ возможна работа ячейки памяти и какая теплота выделится в схеме, если ключ оставить замкнутым надолго?

Ответ. 0.7 мс, 0.2 Дж

Решение. До протекания заряда величиной Q_0 мемристор ведёт себя как обычный резистор. Тогда зависимость заряда на конденсаторе (а значит и протёкшего через мемристор) будет задаваться выражением

$$Q(t) = C\mathcal{E}(1 - \exp(-t/R_0C)).$$

Отсюда, найдём искомый момент времени:

$$t = -R_0 C \ln(1 - Q_0/C\mathcal{E}) = 0.7 \text{ мс}$$

Через большое время конденсатор зарядится до напряжения $\mathcal{E}$, его энергия будет равна $C\mathcal{E}/2$, соответственно через схему протечёт заряд $C\mathcal{E}$. Значит, работа источника составит $C\mathcal{E}^2$. Из ЗСЭ для электрической цепи выделится теплота $C\mathcal{E}^2/2 = 4Q_0^2/C = 0.2$ Дж.

Критерии оценивания.

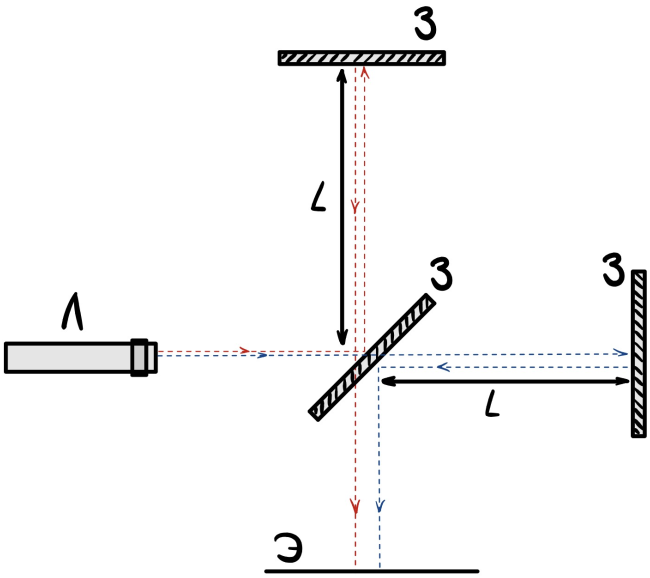
Получена зависимость заряда, протёкшего в схеме, от времени — 2 балл.

Найден искомый момент времени — 1 балл.

Закон сохранения энергии для цепочки — 1 балл.

Итоговое выражение и ответ для теплоты — 1 балл.

Ф11.4-6 Для регистрации чрезвычайно малых деформаций в гравитационно-волновых обсерваториях, например LIGO, используется лазерный интерферометр типа Майкельсона с плечом $L = 100$ м. Упрощенная схема которого представлена на рисунке.



Монохроматический лазер Л с длиной волны $\lambda = 450$ нм, освещает систему зеркал и фокусирует изображение на экране Э. Ход лучей в интерферометре указан на схеме. При проходе гравитационной волны длины плеч изменяются так, что одно плечо растягивается, а второе, перпендикулярное первому, сжимается. В результате на экране проявляется $\Delta m = 10$ дополнительных интерференционных максимумов. Оцените амплитуду относительного растяжения плечей $h = \frac{\Delta L}{L}$ под действием гравитационной волны.

Ответ. $h = 1,13 \cdot 10^{-8}$

Решение. При проходе волны плечи изменятся как:

$$L_x \approx L(1 + h)$$

$$L_y \approx L(1 - h)$$

Откуда появится разность хода лучей:

$$\Delta L = 2(L_x - L_y) = 4hL$$

С другой стороны, эта разность хода порождает Δm максимумов. Условие максимума соответствует целым длинам волн:

$$\Delta L = \Delta m \lambda$$

Окончательно получаем:

$$h = \frac{\Delta m \lambda}{4L}$$

Критерии оценивания.
Установлена связь изменения длин плеч с параметром h — 1 балл.
Записано условие интерференционных максимумов — 1 балл.
Составлено уравнение для определения h — 1 балл.
h найдена в общем виде — 1 балл.
Итоговый ответ — 1 балл.