Научно-техническая олимпиада «Старт в науку»
2022-2023 уч. года
Математика
Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Черновики не проверяются.

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальное число баллов за олимпиаду 35.

Общие принципы выставления оценки по математике:

- правильное решение — **7 баллов**;
- решение с недочетами — **5–6 баллов**;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — **4 балла**;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — **1 балл**;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — **2–3 балла**.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит **0 баллов**.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается **1 балл**.

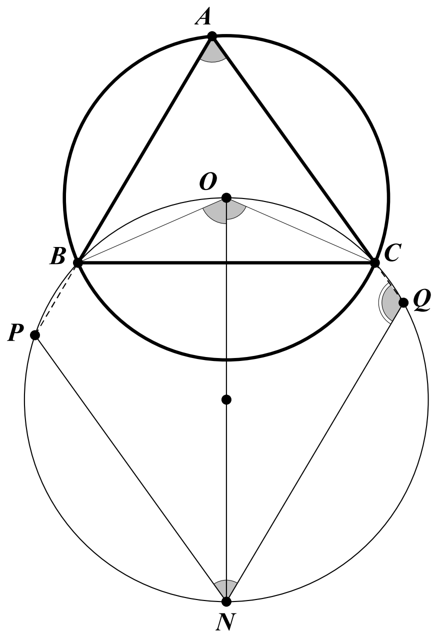
Обязательно следует сделать объявление, что если это не оговорено специально, то ответы в каждой задаче требуют объяснения.

М9.1-1 Решите уравнение $x^2 + \dfrac{1}{x^2-4} = 2\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-4}}$.

Решение. Выделением полного квадрата уравнение сводится к $|x| = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ **(3 балла)**. Ясно, что искомые корни по модулю должны превосходить 2. Учитывая это ограничение, решим $x^2(x^2-4)=1$, откуда $x^2 = 2\pm\sqrt{5}$, и $x = \pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Комментарий. Неэквивалентное преобразование уравнения (например, потерян модуль при выделении полного квадрата) — **0 баллов за задачу**;
Потеряны или приобретены посторонние корни — **снять 2 балла за каждый**.

М9.2-1 Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка O — центр описанной окружности, а затем построена описанная окружность Γ треугольника BOC. Продолжения отрезков AB и AC за точки B и C пересекаются с Γ в точках P и Q соответственно, отличных от B и C. Пусть ON — диаметр Γ. Найдите $\angle AQN$, если $\angle PNQ = 61°$.



Решение. Заметим, что по теореме о вписанном и центральном углах

$$\angle BAC = \angle BOC/2 = \angle BON = \angle CON.$$

Четырёхугольник $OCQN$ вписанный, поэтому

$$\angle CQN = 180° - \angle CON = 180° - \angle QAB.$$

Значит, $AB \parallel QN$. Аналогично $AC \parallel PN$, поэтому четырёхугольник $APNQ$ — параллелограмм. Поскольку $\angle PNQ = 61°$, $\angle AQN = 119°$.

Комментарий. Показано, что $AQ \parallel PN$ или $AP \parallel QN$ — **не менее 4 баллов за задачу**.

М9.3-1 Числа a, b и c из отрезка $[0,1]$ таковы, что их сумма не превосходит $\dfrac{1}{4}$. Докажите, что произведение чисел $(1-a)$, $(1-b)$, $(1-c)$ не меньше $\dfrac{3}{4}$.

Решение. Раскроем скобки в выражении $(1-a)(1-b)(1-c)$:

$$(1-a)(1-b)(1-c) = 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc.$$

Последнее выражение не меньше $\dfrac{3}{4} + ab + ac + (1-a)bc$. Поскольку $ab \geq 0$, $ac \geq 0$, $bc \geq 0$, $(1-a) \geq 0$, получаем, что оно не меньше $\dfrac{3}{4}$.

Комментарий. Показано, произведение чисел $(1-a)$, $(1-b)$, $(1-c)$ не меньше $3/4+ab+ac+bc+abc$ — **2 балла**.

M9.4-1 Между пунктами A и B ездят пассажирские автобусы: движение начинается с 5 утра, причём автобусы из A в B отправляются каждые 20 мин и едут со скоростью 60 км/ч, а автобусы из B в A отправляются каждые 30 мин и едут со скоростью 40 км/ч. Расстояние от A до B равно 120 км. Рассеянный пассажир отправляется из пункта A в пункт B в 8 утра. Он очень боится сесть не на тот автобус, и поэтому каждый раз, когда он движется из A в B и встречает автобус из B в A, он пересаживается на него и едет обратно до следующего встречного автобуса из A в B. Сколько времени ему потребуется, чтобы добраться до пункта B?

Решение. Будем отсчитывать все времена (в часах) от старта поездки. Пусть t_1 — момент первой пересадки (на автобус, движущийся в обратном направлении: в пункт A). Тогда $60 \cdot t_1 + 40 \cdot t_1 = 20$. Поэтому $t_1 = 0{,}2$, за это время пассажир проехал $60 \cdot 0{,}2 = 12$ км **(1 балл)**. Следующая пересадка произойдет в момент времени t_2 такой, что $60 \cdot t_2 + 40 \cdot t_2 = 40$, т. е. $t_2 = 0{,}4$. За время $(t_2 - t_1)$ пассажир проехал 8 км в обратном направлении **(1 балл)**. Дальнейшие перемещения пассажира повторяются аналогично: 12 км в сторону B, затем 8 км обратно в сторону A. Это означает, что в моменты времени $t_{2k} = 0{,}2 \cdot 2k$ он находится на расстоянии $x_{2k} = 4 \cdot k$ км, а в моменты $t_{2k+1} = 0{,}2 \cdot (2k+1)$ — на расстоянии $x_{2k+1} = 12 + 4 \cdot k$ от A. Остаётся приравнять x_{2k} и x_{2k+1} к 120 км и выбрать наименьшее k. При $4 \cdot k = 120$ получаем $k = 30$ и $t_{2 \cdot 30} = 12$, а при $4 \cdot k + 12 = 120$ получаем $k = 27$ и $t_{2 \cdot 27+1} = 11$. В итоге пассажир впервые окажется в пункте B через 11 часов.

Комментарий. Ответ больше верного на 1 ч (считается, что добравшись до B пассажир продолжил движение и завершил движение лишь ещё через один час) — **снять 3 балла**.

M9.5-1 Найдите все натуральные числа m, не превосходящие 2023, у которых куб суммы цифр равняется m^2.

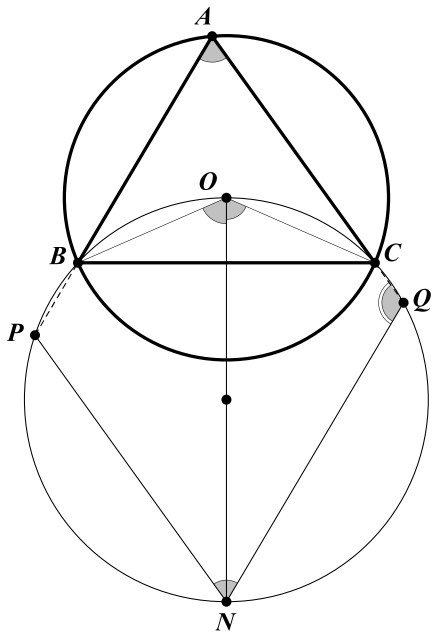
Решение. Максимально возможная сумма цифр равна $1 + 9 + 9 + 9 = 28$, поэтому m^2 не превосходит 28^3 **(1 балл)**. Обозначим сумму цифр через q. Тогда q^3 является полным квадратом, а значит, q также является квадратом. Поскольку $q^3 = m^2 \leq 28^3$, q следует искать среди чисел 1, 4, 9, 16 и 25, откуда m лежит среди 1, 8, 27, 64, 125. Кубы сумм цифр этих чисел равны 1, 512, 729, 1000, 512, а квадраты равны 1, 64, 729, 4096, 15625. Подходят только $m = 1$, $m = 27$.

M9.1-2 Решите уравнение $x^2 + \dfrac{1}{x^2-8} = 2\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-8}}$.

Решение. Выделением полного квадрата уравнение сводится к $|x| = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-8}}$ **(3 балла)**. Ясно, что искомые корни по модулю должны превосходить 2. Учитывая это ограничение, решим $x^2(x^2-8)=1$, откуда $x^2 = 4 \pm \sqrt{17}$, и $x = \pm\sqrt{4+\sqrt{17}}$.

Комментарий. Неэквивалентное преобразование уравнения (например, потерян модуль при выделении полного квадрата) — **0 баллов за задачу**;
Потеряны или приобретены посторонние корни — **снять 2 балла за каждый**.

M9.2-2 Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка O — центр описанной окружности, а затем построена описанная окружность Γ треугольника BOC. Продолжения отрезков AB и AC за точки B и C пересекаются с Γ в точках P и Q соответственно, отличных от B и C. Пусть ON — диаметр Γ. Найдите $\angle PNQ$, если $\angle APN = 123°$.



Решение. Заметим, что по теореме о вписанном и центральном углах

$$\angle BAC = \angle BOC/2 = \angle BON = \angle CON.$$

Четырёхугольник $OCQN$ вписанный, поэтому

$$\angle CQN = 180° - \angle CON = 180° - \angle QAB.$$

Значит, $AB \parallel QN$. Аналогично $AC \parallel PN$, поэтому четырёхугольник $APNQ$ — параллелограмм. Поскольку $\angle APN = 123°$, $\angle PNQ = 57°$.

Комментарий. Показано, что $AQ \parallel PN$ или $AP \parallel QN$ — **не менее 4 баллов за задачу**.

M9.3-2 Числа a, b и c из отрезка $[0,1]$ таковы, что их сумма не превосходит $\dfrac{1}{3}$. Докажите, что произведение чисел $(1-a)$, $(1-b)$, $(1-c)$ не меньше $\dfrac{2}{3}$.

Решение. Раскроем скобки в выражении $(1-a)(1-b)(1-c)$:

$$(1-a)(1-b)(1-c) = 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ca) - abc.$$

Последнее выражение не меньше $\dfrac{2}{3} + ab + ac + (1-a)bc$. Поскольку $ab \geq 0$, $ac \geq 0$, $bc \geq 0$, $(1-a) \geq 0$, получаем, что оно не меньше $\dfrac{2}{3}$.

Комментарий. Показано, произведение чисел $(1-a)$, $(1-b)$, $(1-c)$ не меньше $2/3 + ab + ac + bc + abc$ — **2 балла**.

M9.4-2 Между пунктами A и B ездят пассажирские автобусы: движение начинается с 5 утра, причём автобусы из A в B отправляются каждые 15 мин и едут со скоростью 80 км/ч, а автобусы из B в A отправляются каждые 30 мин и едут со скоростью 40 км/ч. Расстояние от A до B равно 160 км. Рассеянный пассажир отправляется из пункта A в пункт B в 6 утра. Он очень боится сесть не на тот автобус, и поэтому каждый раз, когда он движется из A в B и встречает автобус из B в A, он пересаживается на него и едет обратно до следующего встречного автобуса из A в B. Сколько времени ему потребуется, чтобы добраться до пункта B?

Решение. Будем отсчитывать все времена от старта поездки. Пусть t_1 — момент первой пересадки (на автобус, движущийся в обратном направлении: в пункт A). Тогда $80 \cdot t_1 + 40 \cdot t_1 = 20$. Поэтому $t_1 = 1/6$ ч $= 10$ мин, за это время пассажир проехал $80 \cdot 1/6 = 40/6$ км **(1 балл)**. Следующая пересадка произойдет в момент времени t_2 такой, что $80 \cdot t_2 + 40 \cdot t_2 = 40$, т. е. $t_2 = 1/3$ ч $= 20$ мин. За время $(t_2 - t_1)$ пассажир проехал $40/6$ км в обратном направлении **(1 балл)**. Дальнейшие перемещения пассажира повторяются аналогично: $40/3$ км в сторону B, затем $40/6$ км обратно в сторону A. Это означает, что в моменты времени $t_{2k} = 1/6 \cdot 2k$ он находится на расстоянии $x_{2k} = 40/6 \cdot k$ км, а в моменты $t_{2k+1} = 1/6 \cdot (2k+1)$ — на расстоянии $x_{2k+1} = 40/3 + 40/6 \cdot k$ от A. Остаётся приравнять x_{2k} и x_{2k+1} к 160 и выбрать наименьшее k. При $40/6 \cdot k = 160$ получаем $k = 24$ и $t_{2\cdot 24} = 8$ ч, а при $40/3 + 40/6 \cdot k = 160$ получаем $k = 22$ и $t_{2\cdot 22+1} = 7{,}5$ ч. В итоге пассажир впервые окажется в пункте B через 7,5 часов.

Комментарий. Ответ больше верного на 0,5 ч (считается, что добравшись до B пассажир продолжил движение и завершил движение лишь ещё через полчаса) — **снять 3 балла**.

M9.5-2 Найдите все натуральные числа m, не превосходящие 2022, у которых куб суммы цифр равняется m^2.

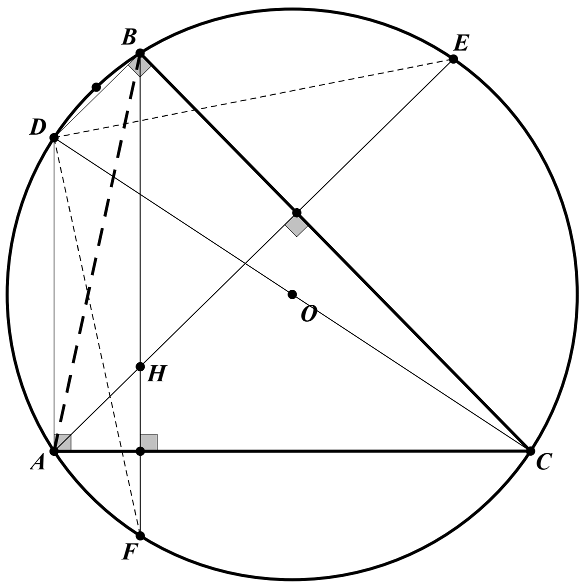
Решение. Максимально возможная сумма цифр равна $1 + 9 + 9 + 9 = 28$, поэтому m^2 не превосходит 28^3 **(1 балл)**. Обозначим сумму цифр через q. Тогда q^3 является полным квадратом, а значит, q также является квадратом. Поскольку $q^3 = m^2 \leq 28^3$, q следует искать среди чисел 1, 4, 9, 16 и 25, откуда m лежит среди 1, 8, 27, 64, 125. Кубы сумм цифр этих чисел равны 1, 512, 729, 1000, 512, а квадраты равны 1, 64, 729, 4096, 15625. Подходят только $m = 1$, $m = 27$.

M10.1-3 Найдите все пары рациональных чисел a, b таких, что число $\sqrt{7+\sqrt{13}}$ представимо в виде $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Решение. Возведём обе части равенства $\sqrt{7+\sqrt{13}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ в квадрат: $a+b+2\sqrt{ab} = 7+\sqrt{13}$. Отсюда следует, что $2\sqrt{ab} = \sqrt{13}+t$, где t рационально. Покажем, что $t = 0$. В самом деле, после возведения в квадрат получаем $4ab = 13+t^2+2t\sqrt{13}$, откуда $t\sqrt{13}$ рационально. Поэтому $t = 0$. Итак, $4ab = 13$, $a+b = 7$. Решая полученную систему, находим $a = 1/2$, $b = 13/2$ или $a = 13/2$, $b = 1/2$.

Комментарий. Грубая ошибка при использовании утверждений о рациональных или иррациональных числах — **0 баллов за задачу**;
Без доказательства считается, что $t = 0$ (в обозначениях, приведённых в решении) — **снять 2 балла**.

M10.2-3 Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с диаметром CD, а BF и AE — хорды этой окружности, содержащие высоты треугольника. Найдите длину хорды EF, если $AB = 9$, а $\angle ACB = 2\arccos\dfrac{5}{6}$.



Решение. $AD \parallel BF$ и $DB \parallel AE$, поэтому $AFBD$ и $ADBE$ — вписанные трапеции. Отсюда $AB = DF = DE$, треугольник DEF равнобедренный, требуется найти его основание, а известна длина бокового ребра. Остаётся найти любой угол этого треугольника. Обозначим $\angle ACB = \alpha$. Тогда

$$90^\circ - \alpha = \angle FBC = \angle FEC = 90^\circ - \angle FCE/2,$$

значит, $\angle FCE = 2\alpha$. А $\angle FDE = 180^\circ - \alpha$, поэтому $EF = 2DE\sin\left(\dfrac{1}{2}\angle FDE\right) = 2x\cos\dfrac{\alpha}{2} = 18\cdot\dfrac{5}{6} = 15.$

Комментарий. Использовано без доказательства утверждение о том, что точки H и F симметричны относительно AC или что точки H и E симметричны относительно BC — **баллы не снимаются**.

M10.3-3 Изобразите на координатной плоскости множество всех точек (x, y), координаты которых удовлетворяют равенству $x^3+y^3+3xy = 1$.

Решение. Замена $u = x+y$, $v = xy$ сводит данное уравнение к уравнению $u^3-3uv+3v-1 = 0$ **(1 балл)**, левая часть которого раскладывается на множители: $(u-1)(u^2+u+1-3v) = 0$ **(2 балла)**. Сделав обратную замену, получим

$$(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1) = (x+y-1)\left((x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2\right)/2 = 0.$$

Получаем, что данному уравнению удовлетворяют все точки на прямой $x+y-1 = 0$ и точка $(-1,-1)$.

Комментарий. Потеряна точка $(-1,-1)$, выражение $(x^2+y^2-xy+x+y+1)$ исследовано неверно или вообще не исследовано — **не более 4 баллов за задачу**.

M10.4-3 Натуральное число $38^2 = 1444$ — наименьшее, являющееся полным квадратом и заканчивающееся на три четвёрки. Найдите все остальные полные квадраты, десятичная запись которых также заканчивается на 444.

Решение. Вычтем из n^2 число 1444: $n^2 - 38^2 = (n-38)(n+38)$ должно оканчиваться на 000, поэтому оно делится на 5^3 и на 8. Для этого хотя бы один из множителей $n-38$ и $n+38$ должен делиться на 4, а тогда оба они делятся на 4, поскольку их разность кратна 4. Заметим также, что хотя бы один из множителей $n-38$ и $n+38$ делится на 5, а тогда второй из них на 5 не делится, поскольку их разность не кратна 5. Итак, либо $n-38$ делится на $4 \cdot 5^3$, либо $n+38$ делится на $4 \cdot 5^3$. Значит, только числа вида $n = \pm 38 + 500 \cdot k$, $k \geq 1$ могут удовлетворять условию. Заметим, что все они подходят, поскольку слагаемое $500k$ не влияет на последние три цифры квадрата числа n.

Комментарий. Показано, что только числа вида $n = \pm 38 + 500 \cdot k$, $k \geq 1$ могут удовлетворять условию — **не менее 5 баллов за задачу**.

M10.5-3 Найдите количество наборов $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{100}, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{100})$, состоящих из 200 чисел, принимающих значения 0 или 1, таких, что сумма $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_{100} \cdot y_{100}$ нечётна.

Решение. Пусть $f(n)$ — количество таких наборов из $2n$ чисел с нечётной суммой, а $g(n)$ — количество наборов с чётной суммой. В задаче требуется вычислить $f(100)$.
Ясно, что $f(n) + g(n) = 2^{2n}$. Заметим, что $f(n+1) = 3f(n) + g(n) = 2^{2n} + 2f(n)$. С помощью индукции нетрудно получить с помощью этой формулы, что $f(n) = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$. Окончательно находим искомое количество наборов $f(100) = 2^{199} + 2^{99}$.

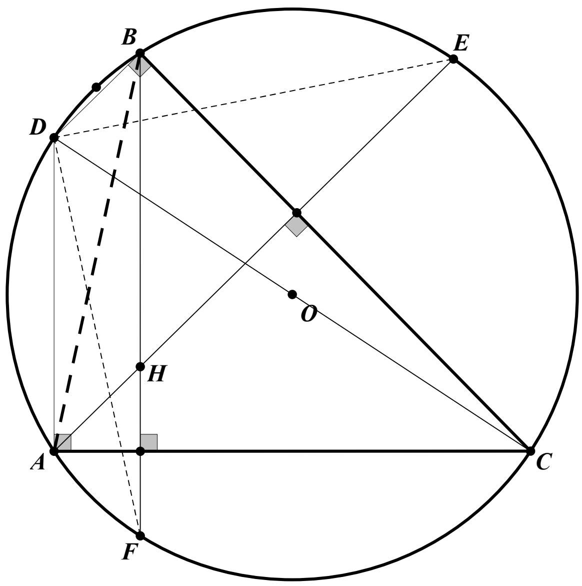
Комментарий. Получена система рекуррентных соотношений для $f(n)$ и $g(n)$ — **2 балла**;
Получено одно рекуррентное соотношение для $f(n)$ — **ещё 2 балла**.

M10.1-4 Найдите все пары рациональных чисел a, b таких, что число $\sqrt{8+\sqrt{15}}$ представимо в виде $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Решение. Возведём обе части равенства $\sqrt{8+\sqrt{15}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ в квадрат: $a+b+2\sqrt{ab}=8+\sqrt{15}$. Отсюда следует, что $2\sqrt{ab}=\sqrt{15}+t$, где t рационально. Покажем, что $t=0$. В самом деле, после возведения в квадрат получаем $4ab=15+t^2+2t\sqrt{15}$, откуда $t\sqrt{15}$ рационально. Поэтому $t=0$. Итак, $4ab=15$, $a+b=8$. Решая полученную систему, находим $a=1/2$, $b=15/2$ или $a=15/2$, $b=1/2$.

Комментарий. Грубая ошибка при использовании утверждений о рациональных или иррациональных числах — **0 баллов за задачу**;
Без доказательства считается, что $t=0$ (в обозначениях, приведённых в решении) — **снять 2 балла**.

M10.2-4 Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с диаметром CD, а BF и AE — хорды этой окружности, содержащие высоты треугольника. Найдите длину хорды EF, если $AB=5$, а $\angle ACB = 2\arccos\frac{4}{5}$.



Решение. $AD \parallel BF$ и $DB \parallel AE$, поэтому $AFBD$ и $ADBE$ — вписанные трапеции. Отсюда $AB=DF=DE$, треугольник DEF равнобедренный, требуется найти его основание, а известна длина бокового ребра. Остаётся найти любой угол этого треугольника. Обозначим $\angle ACB=\alpha$. Тогда

$$90^\circ-\alpha=\angle FBC=\angle FEC=90^\circ-\angle FCE/2,$$

значит, $\angle FCE=2\alpha$. А $\angle FDE=180^\circ-\alpha$, поэтому $EF=2DE\sin\left(\frac{1}{2}\angle FDE\right)=2x\cos\frac{\alpha}{2}=10\cdot\frac{4}{5}=8.$

Комментарий. Использовано без доказательства утверждение о том, что точки H и F симметричны относительно AC или что точки H и E симметричны относительно BC — **баллы не снимаются**.

M10.3-4 Изобразите на координатной плоскости множество всех точек (x, y), координаты которых удовлетворяют равенству $x^3+y^3+1=3xy$.

Замена $u=x+y$, $v=xy$ сводит данное уравнение к уравнению $u^3-3uv-3v+1=0$ **(1 балл)**, левая часть которого раскладывается на множители: $(u+1)(u^2-u+1-3v)=0$ **(2 балла)**. Сделав обратную замену, получим

$$(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)=(x+y+1)\left((y-x)^2+(1-x)^2+(1-y)^2\right)/2=0.$$

Получаем, что данному уравнению удовлетворяют все точки на прямой $x+y+1=0$ и точка $(1,1)$.

Комментарий. Потеряна точка $(1,1)$, выражение $(x^2+y^2-xy-x-y+1)$ исследовано неверно или вообще не исследовано — **не более 4 баллов за задачу**.

М10.4-4 Натуральное число $34^2 = 1156$ — наименьшее, являющееся полным квадратом и заканчивающееся на 156. Найдите все остальные полные квадраты, десятичная запись которых также заканчивается на 156.

Решение. Вычтем из n^2 число 1156: $n^2 - 34^2 = (n-34)(n+34)$ должно оканчиваться на 000, поэтому оно делится на 5^3 и на 8. Для этого хотя бы один из множителей $n-34$ и $n+34$ должен делиться на 4, а тогда оба они делятся на 4, поскольку их разность кратна 4. Заметим также, что хотя бы один из множителей $n-34$ и $n+34$ делится на 5, а тогда второй из них на 5 не делится, поскольку их разность не кратна 5. Итак, либо $n-34$ делится на $4 \cdot 5^3$, либо $n+34$ делится на $4 \cdot 5^3$. Значит, только числа вида $n = \pm 34 + 500 \cdot k$, $k \geq 1$ могут удовлетворять условию. Заметим, что все они подходят, поскольку слагаемое $500k$ не влияет на последние три цифры квадрата числа n.

Комментарий. Показано, что только числа вида $n = \pm 34 + 500 \cdot k$, $k \geq 1$ могут удовлетворять условию — **не менее 5 баллов за задачу**.

М10.5-4 Найдите количество наборов $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{200}, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{200})$, состоящих из 400 чисел, принимающих значения 0 или 1, таких, что сумма $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_{200} \cdot y_{200}$ нечётна.

Решение. Пусть $f(n)$ — количество таких наборов из $2n$ чисел с нечётной суммой, а $g(n)$ — количество наборов с чётной суммой. В задаче требуется вычислить $f(200)$.
Ясно, что $f(n) + g(n) = 2^{2n}$. Заметим, что $f(n+1) = 3f(n) + g(n) = 2^{2n} + 2f(n)$. С помощью индукции нетрудно получить с помощью этой формулы, что $f(n) = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$. Окончательно находим искомое количество наборов $f(200) = 2^{399} + 2^{199}$.

Комментарий. Получена система рекуррентных соотношений для $f(n)$ и $g(n)$ — **2 балла**;
Получено одно рекуррентное соотношение для $f(n)$ — **ещё 2 балла**.

М11.1-5 Олимпиадный кружок посещает 64 школьника. Каждую неделю учитель составляет из них 8 команд по 8 человек в каждой для проведения математических боёв. Докажите, что за 10 недель обязательно найдутся два школьника, оказавшиеся в одной команде хотя бы дважды.

Решение. Пусть количество школьников равно n^2 $(n = 8)$. Каждый школьник попадает в команду с $n-1$ другими школьниками каждую неделю. Это значит, что он может попадать в команды, состоящие только из людей, с которыми он ещё не был в команде, не более, чем $(n^2-1)/(n-1) = n+1$ раз. А за $n+2$ раза он обязательно побывает с некоторым человеком в одной команде дважды.

М11.2-5 Про положительное число x известно, что x^3 равно дробной части $(x+1)^3$. Найдите все такие x.

Решение. $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, причём дробная часть этого числа равна x^3, поэтому $3x^2 + 3x$ — целое. При этом $x^3 < 1$, т. е. $x < 1$. Тогда $3x^2 + 3x$ может принимать натуральные значения не больше 5. В качестве ответа следует дать все положительные корни квадратных уравнений $3x^2 + 3x - k = 0$ при $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Комментарий. Найдены все возможные значения $3x^2 + 3x$ — **4 балла**.

М11.3-5 Найдите все числа x такие, что существует прямоугольный треугольник, длины сторон которого равны $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$.

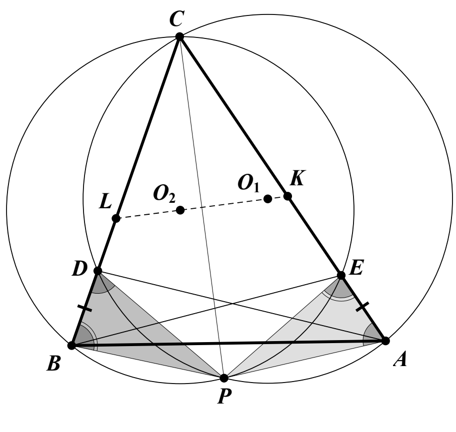
Решение. Если гипотенуза этого треугольника равна $\operatorname{tg} x$, то она равна $\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$, и тогда $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (**1 балл**).

Если же гипотенуза равна $\sin x$, то $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \geq \sin x$, что невозможно (**2 балла**).

Наконец, если гипотенуза равна $\cos x$, то $\cos 2x = \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, откуда для $t = \operatorname{tg} x$ получаем $1 - t^2 = t^2(1 + t^2)$, $t = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ и $x = \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{2} - 1} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (**4 балла**).

Комментарий. Неверно решено элементарное тригонометрическое уравнение или ошибка в тригонометрической формуле — **0 баллов за задачу**.

М11.4-5 Точки D и E выбраны на сторонах BC и AC треугольника ABC соответственно таким образом, что $BD = AE$. Прямая, соединяющая центры описанных окружностей треугольников ADC и BEC, пересекает прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Известно, что $CK = 3$. Найдите CL.



Решение. Докажем, что $CK = CL$. Обозначим через P вторую точку пересечения окружностей и докажем, что она равноудалена от сторон $\angle ACB$. Поскольку $CP \perp KL$ (линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде), это будет означать, что в треугольнике CKL прямая CP есть высота и биссектриса одновременно, и поэтому $CK = CL$. Заметим, что треугольники AEP и BDP равны по стороне ($BD = AE$) и двум прилежащим углам (например, $\angle PEA = 180°-\angle PEC = \angle PBC$). Осталось заметить, что высоты из вершины P в треугольниках AEP и BDP также равны.

Комментарий. Получено равенство треугольников AEP и BDP — **2 балла**.

М11.5-5 Найдите количество наборов $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{100}, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{100})$, состоящих из 200 чисел, принимающих значения 0 или 1, таких, что сумма $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_{100} \cdot y_{100}$ чётна.

Решение. Пусть $f(n)$ — количество таких наборов из $2n$ чисел с нечётной суммой, а $g(n)$ — количество наборов с чётной суммой. В задаче требуется вычислить $g(100)$. Ясно, что $f(n)+g(n) = 2^{2n}$. Заметим, что $f(n+1) = 3f(n)+g(n) = 2^{2n}+2f(n)$. С помощью индукции нетрудно получить с помощью этой формулы, что $f(n) = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$. Тогда $g(n) = 2^{2n-1} + 2^{n-1}$. Окончательно получаем искомое количество наборов $g(100) = 2^{199} - 2^{99}$.

Комментарий. Получена система рекуррентных соотношений для $f(n)$ и $g(n)$ — **2 балла**; Получено одно рекуррентное соотношение для $g(n)$ — **ещё 2 балла**.

M11.1-6 Олимпиадный кружок посещает 49 школьников. Каждую неделю учитель составляет из них 7 команд по 7 человек в каждой для проведения математических боёв. Докажите, что за 9 недель обязательно найдутся два школьника, оказавшиеся в одной команде хотя бы дважды.

Решение. Пусть количество школьников равно n^2 $(n = 7)$. Каждый школьник попадает в команду с $n-1$ другими школьниками каждую неделю. Это значит, что он может попадать в команды, состоящие только из людей, с которыми он ещё не был в команде, не более, чем $(n^2-1)/(n-1) = n+1$ раз. А за $n+2$ раза он обязательно побывает с некоторым человеком в одной команде дважды.

M11.2-6 Про положительное число x известно, что x^3 равно дробной части числа $(x+1)^3 + (x-x^2)$. Найдите все такие x.

Решение. $(x+1)^3 + (x-x^2) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$, причём дробная часть этого числа равна x^3, поэтому $2x^2+4x$ — целое. При этом $x^3 < 1$, т. е. $x < 1$. Тогда $2x^2 + 4x$ может принимать натуральные значения не больше 6. В качестве ответа следует дать все положительные корни квадратных уравнений $2x^2 + 4x - k = 0$ при $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Комментарий. Найдены все возможные значения $2x^2 + 4x$ — **4 балла**.

M11.3-6 Найдите все числа x такие, что существует прямоугольный треугольник, длины сторон которого равны $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{ctg} x$.

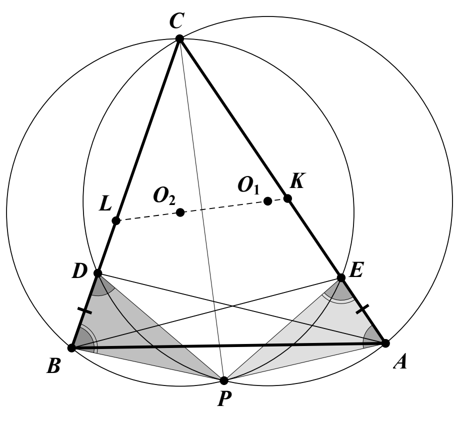
Решение. Если гипотенуза этого треугольника равна $\operatorname{ctg} x$, то она равна $\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$, и тогда $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (**1 балла**).

Если же гипотенуза равна $\cos x$, то $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \geq \cos x$, что невозможно (**2 балла**).

Наконец, если гипотенуза равна $\sin x$, то $\cos 2x = -\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, откуда для $t = \operatorname{tg} x$ получаем $t^2(t^2-1) = 1 + t^2$, $t = \sqrt{\sqrt{2}+1}$ и $x = \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{2}+1} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (**4 балла**).

Комментарий. Неверно решено элементарное тригонометрическое уравнение или ошибка в тригонометрической формуле — **0 баллов за задачу**.

M11.4-6 Точки D и E выбраны на сторонах BC и AC треугольника ABC соответственно таким образом, что $BD = AE$. Прямая, соединяющая центры описанных окружностей треугольников ADC и BEC, пересекает прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Известно, что $CL = 10$. Найдите CK.



Решение. Докажем, что $CK = CL$. Обозначим через P вторую точку пересечения окружностей и докажем, что она равноудалена от сторон $\angle ACB$. Поскольку $CP \perp KL$ (линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде), это будет означать, что в треугольнике CKL прямая CP есть высота и биссектриса одновременно, и поэтому $CK = CL$. Заметим, что треугольники AEP и BDP равны по стороне ($BD = AE$) и двум прилежащим углам (например, $\angle PEA = 180° - \angle PEC = \angle PBC$). Осталось заметить, что высоты из вершины P в треугольниках AEP и BDP также равны.

Комментарий. Получено равенство треугольников AEP и BDP — **2 балла**.

M11.5-6 Найдите количество наборов $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{200}, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{200})$, состоящих из 400 чисел, принимающих значения 0 или 1, таких, что сумма $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_{200} \cdot y_{200}$ чётна.

Решение. Пусть $f(n)$ — количество таких наборов из $2n$ чисел с нечётной суммой, а $g(n)$ — количество наборов с чётной суммой. В задаче требуется вычислить $g(200)$. Ясно, что $f(n)+g(n) = 2^{2n}$. Заметим, что $f(n+1) = 3f(n)+g(n) = 2^{2n}+2f(n)$. С помощью индукции нетрудно получить с помощью этой формулы, что $f(n) = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$. Тогда $g(n) = 2^{2n-1} + 2^{n-1}$. Окончательно получаем искомое количество наборов $g(200) = 2^{399} - 2^{199}$.

Комментарий. Получена система рекуррентных соотношений для $f(n)$ и $g(n)$ — **2 балла**; Получено одно рекуррентное соотношение для $g(n)$ — **ещё 2 балла**.