

# Олимпиада "Старт в науку". 2023-драфт

Файл содержит задачи и предполагаемые решения

## 9 класс

### 1. Скалолаз

**Цель работы:** Исследовать траекторию скалолаза при движении на растяжимой веревке.

**Оборудование:** Скотч, ножницы, две деревянные линейки для закрепления на столе, три канцелярских зажима (один из них - "скалолаз"), две линейки, резинка («растяжимая веревка»).

### Задание

### Теория

Концы тонкой и легкой веревки закреплены на одной высоте на расстоянии  $L$  друг от друга. Скалолаз массой  $m$  ползет, цепляясь за растяжимую веревку. По какой траектории он при этом движется? Напишите уравнение этой кривой  $y = f(x)$ . Считайте, что веревка подчиняется закону Гука, ее жесткость  $k$ , а длина  $l$  до растяжения пренебрежимо мала.



### Эксперимент

1. Определите длину нерастянутой резинки  $l$  и величину  $\frac{mg}{k}$ .
2. Соберите экспериментальную установку для исследования траектории скалолаза. Позаботьтесь о том, чтобы измерения можно было проводить с достаточной точностью. Кроме того, провис в средней части ненагруженной резинки не должен превышать 1-2 мм.
3. Измерьте расстояние между точками подвеса  $L$ .

4. Для разных положений скалолаза измерьте его координаты  $(x, y)$ .
5. Постройте график зависимости  $y(x)$
6. Постройте график в линеаризованных координатах.
7. Проверьте справедливость полученной теоретической формулы  $y = f(x)$ .

## Решение

### Теория

Данная задача интересна тем, что ее теоретическое решение достаточно просто проверить экспериментально. Прежде чем искать уравнение траектории, обсудим закон Гука, который в школьном варианте записывается в виде:

$$F = k \cdot \Delta L, \quad (1)$$

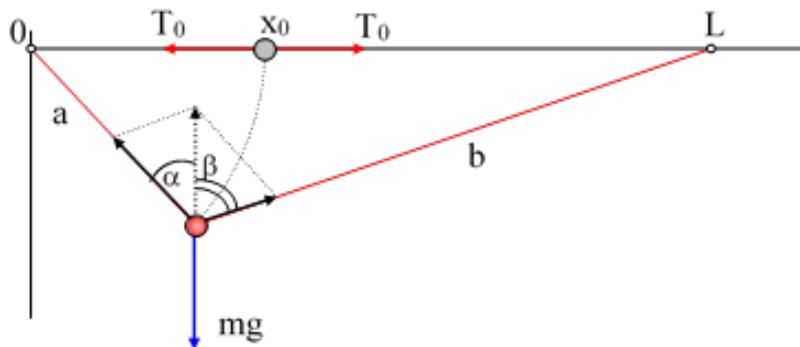
здесь  $k$  – коэффициент упругости пружины (веревки),  $\Delta L$  – величина ее деформации,  $F$  – сила, деформирующая пружину. Закон Гука можно записать для величины относительной деформации:

$$F = k \cdot L \cdot \frac{\Delta L}{L} = K \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad (2)$$

Величина  $K = k \cdot L$  является удельной упругой характеристикой. Эта величина позволяет определить (в соответствии с формулой (2)) коэффициент упругости любой части отрезка пружины:

$$k_x = \frac{K}{x},$$

$x$  – длина отрезка пружины.



Перейдем к решению поставленной задачи. Предположим, что скалолаз висит в точке  $x_0$ . Под действием силы тяжести веревка будет растягиваться, и скалолаз опустится в точку с координатами  $(x, y)$ . В этой точке скалолаз находится в равновесии (висит на двухверевках длиной  $a$  и  $b$ ). Натяжение веревки в точке  $x_0$ :

$$T_0 = k(L - l) \approx k \cdot L \quad (3)$$

Здесь  $l$  – длина нерастянутой веревки. Если предположить, что длина нерастянутой веревки очень мала ( $l \ll L$ ), то при переходе в точку  $(x, y)$  натяжение веревок  $a$  и  $b$  изменяется пропорционально их удлинению:

$$\begin{aligned} T_a &= T_0 \cdot \frac{a}{x_0}, \\ T_b &= T_0 \cdot \frac{b}{L - x_0}. \end{aligned} \quad (4)$$

При равновесии скалолаза проекции сил на ось  $x$  должны быть равны:

$$\begin{aligned} T_a \cdot \sin(\alpha) &= T_b \cdot \sin(\beta), \\ T_0 \cdot \frac{a}{x_0} \cdot \frac{x}{a} &= T_0 \cdot \frac{b}{L - x_0} \cdot \frac{L - x}{b}. \end{aligned}$$

После преобразования получаем:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{L - x}{L - x_0} \rightarrow x = x_0$$

Таким образом, скалолаз из точки  $x_0$  опускается вертикально, и в формулах (4)  $x_0$  можно заменить на  $x$ . Запишем условие равновесия по оси  $y$ :

$$\begin{aligned} mg &= T_a \cdot \cos(\alpha) + T_b \cdot \cos(\beta), \\ mg &= T_0 \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{y}{a} + T_0 \cdot \frac{b}{L - x} \cdot \frac{y}{b}. \end{aligned}$$

После преобразований (с учетом (3)):  $T_0 = k\Delta L$ , при условии  $l \ll L$ ) получаем уравнение траектории (соотношение между  $y$  и  $x$ ):

$$y = \frac{mg}{kL^2}(L - x) \cdot x \quad (5)$$

Эта формула показывает, что уравнением траектории скалолаза является парабола. Формула (5) получена при условии  $l \ll L$ . При точном выводе можно получить промежуточное соотношение вида:

$$y = \frac{mg}{kL^2} \cdot x(L - x) \cdot \frac{x_0}{x \left(1 - \frac{l \cdot x_0}{L \cdot a}\right)} \quad (6)$$

Оно отличается от формулы (5) добавочным множителем, который является «слабой функцией» величины  $x$  и может быть заменен константой. Действительно, из рисунка легко видеть, что при малых «провисах»  $x \approx x_0$ ,  $x_0 \approx a$ . При этом приближении дополнительный множитель равен константе и формула (6) записывается в виде:

$$y(x) = \frac{mg}{kL(L - l)} \cdot x(L - x) \quad (7)$$

Можно ожидать, что формула (7) будет хорошо описывать экспериментальные данные, даже если не будет выполнено условие  $l \ll L$ .

## Эксперимент

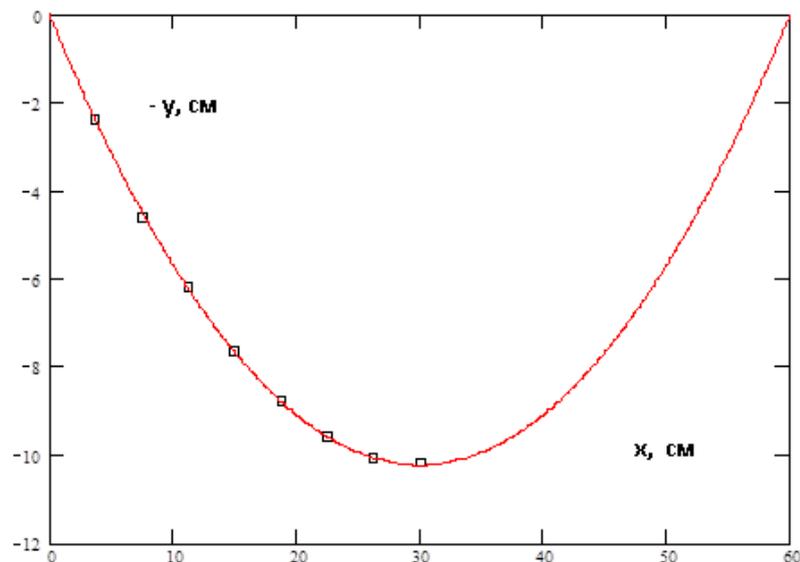
Для проведения эксперимента потребуется упругая нить или длинная «мягкая» пружина, груз (скалолаз), линейка. Предварительно определяется длина нерастянутой пружины  $l$  и величина  $\frac{mg}{k}$ . (Для этого измеряют удлинение вертикально висящей пружины под действием груза.) Пружина натягивается горизонтально (провис в средней части не должен превышать 1-2 мм). Измеряют расстояние между точками подвеса  $L$ . Груз вешают на пружину и при помощи линейки измеряют его координаты  $(x, y)$ . Для удобства измерения величины  $y$  между точками подвеса натягивают горизонтальную нить. Так как кривая (траектория положений равновесия груза) будет симметричной, то измерения имеет смысл проводить только для половины пружины (получают 5–10 точек траектории). По экспериментальным данным строят график в координатах  $(y, (L-x) \cdot x)$ . Экспериментальные точки аппроксимируют прямой линией. Если экспериментальные точки хорошо ложатся на проведенную прямую, то это доказывает справедливость формулы (7). Для дополнительной проверки согласия теории и эксперимента сравнивают теоретический и экспериментальный коэффициенты наклона прямой. В соответствии с формулой (7) теоретический коэффициент наклона определяется по формуле

$$\beta_{teor} = \frac{mg}{kL(L-l)}. \quad (8)$$

Экспериментальный коэффициент наклона определяется по наклону линии, аппроксимирующей экспериментальные точки «траектории».

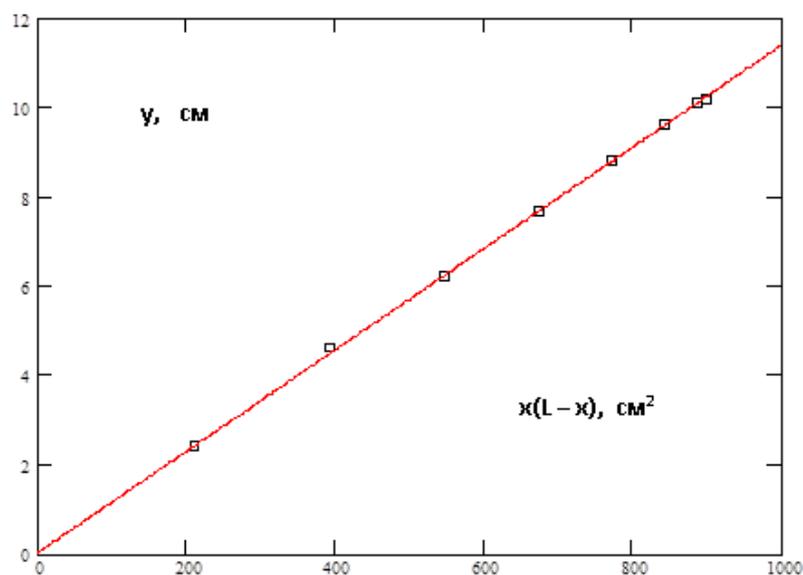
### Пример экспериментальных данных

$l$ , см	$\frac{mg}{k}$ , см	$L$ , см	$x$ , см	$y$ , см	$x(L-x) \cdot 10^{-2}$ , см	$\beta$ , см $^{-1}$
25,5	24,7	60	3,75	2,4	2,11	$\beta_t = 1,19 \cdot 10^{-2}$ $\beta_e = 1,14 \cdot 10^{-2}$
			7,5	4,6	3,94	
			11,25	6,2	5,48	
			15	7,65	6,75	
			18,75	8,8	7,73	
			22,5	9,6	8,44	
			26,25	10,1	8,86	
			30	10,2	9,00	



Первый график построен без преобразования координат. (Форма графика соответствует форме траектории движения. График «перевернут».) Сплошная линия проведена по уравнению параболы (7) с использованием коэффициента  $\frac{mg}{kL(L-l)}$ , рассчитанного по методу наименьших квадратов (по коэффициенту наклона прямой, аппроксимирующей экспериментальные данные в линейных координатах, смотри второй график.)

Второй график, построенный в линейных координатах  $(y, x(L - x))$ , показывает хорошее согласие эксперимента и теории. Это подтверждается небольшим отличием теоретической и экспериментальной величин  $\beta$  (см. таблицу).





## 2. Толстая линза

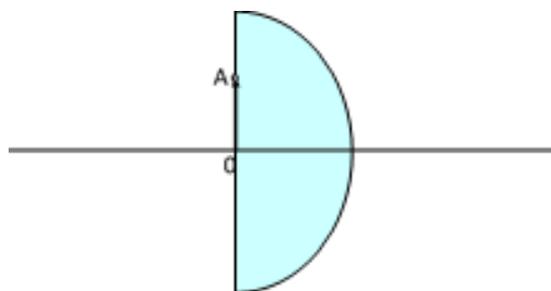
**Цель работы:** Исследовать оптические свойства полуцилиндра.

**Оборудование:** Полоска миллиметровки, две линейки, цилиндрический тонкостенный стеклянный сосуд, неизвестная жидкость, ножницы.

### Задание

### Теория

Небольшой источник  $OA$  вплотную прижат к плоской поверхности полуцилиндра. Изображение обозначим как  $OA^*$ . Полуцилиндр имеет радиус  $R$ , показатель преломления материала цилиндра  $n$ . Найдите увеличение изображения  $\Gamma = OA^*/OA$ .



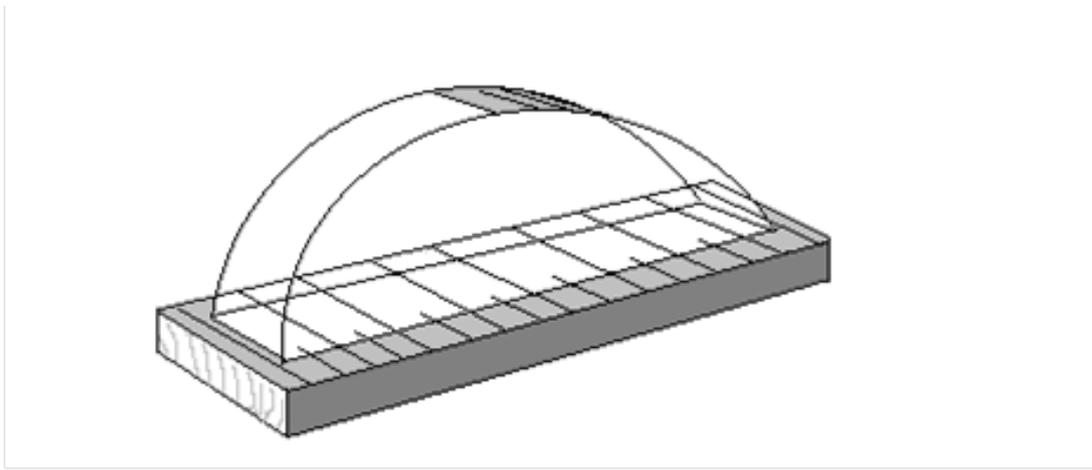
### Эксперимент

1. Определите показатель преломления неизвестной жидкости.

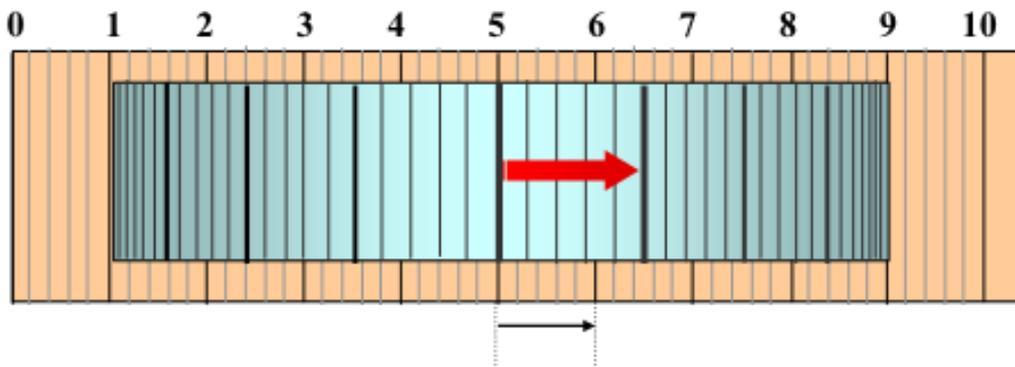
### Решение

### Теория

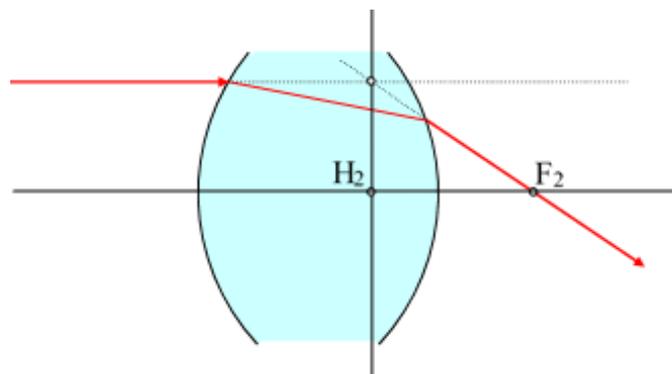
Прозрачный полуцилиндр обладает интересным оптическим свойством. В этом нетрудно убедиться. Поставим полуцилиндр на линейку так, как это показано на рисунке.



Рассматривая сантиметровые деления линейки через полуцилиндр, мы увидим их увеличенными в 1,5 раза.

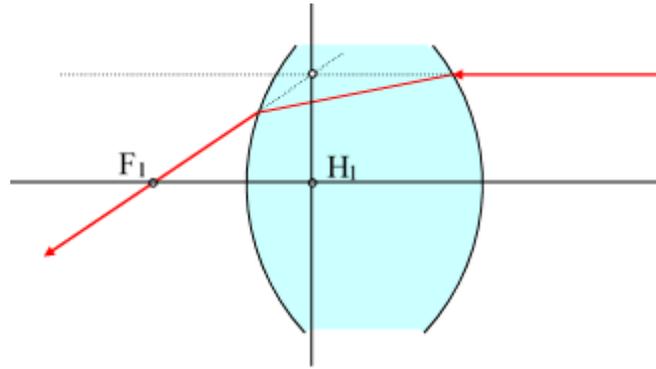


Это увеличение легко измерить миллиметровой шкалой линейки, которую мы расположили вне цилиндра. (При этом следует центр полуцилиндра совместить с одним из сантиметровых делений, чтобы центральный сантиметровый штрих не был сдвинут.) Удивительным является совпадение полученного коэффициента увеличения с показателем преломления стекла ( $n = 1,5$ ). Покажем теоретически, что это совпадение не является случайным, а проведенный нами опыт дает простой и быстрый метод определения показателя преломления. Полуцилиндр является толстой линзой. В теории таких линз используют две главные оптические плоскости и, соответственно, два оптических центра. Экспериментальное определение параметров линзы (правильной, центрированной) поясняют рисунки.



Положение второй оптической плоскости и второго фокуса определяется мнимой

точкой пересечения входящего и выходящего лучей. Фокусное расстояние отсчитывается от соответствующей оптической плоскости.

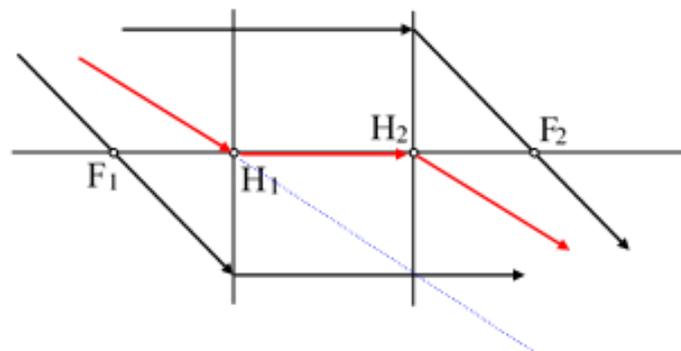


Первая оптическая плоскость и первый фокус определяются «обратным ходом» параллельного луча.

Первое фокусное расстояние отсчитывается от первой оптической плоскости. Можно показать, что  $F_1 = F_2$ .

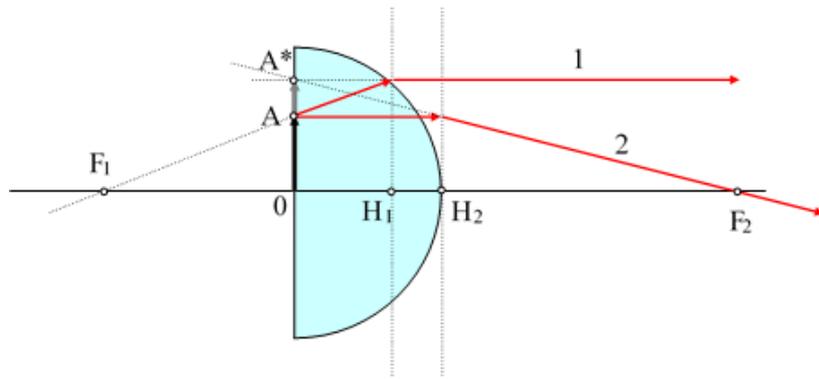
Если расстояния между оптическими плоскостями значительно меньше фокусного расстояния  $\Delta H \ll F$ , то такую линзу можно считать тонкой. Для нее вводят только одну оптическую плоскость, которую проводят через середину отрезка  $H_1 - H_2$ . При этом, соответственно, тонкая линза будет иметь только один оптический центр.

При геометрических построениях изображений в толстых линзах пользуются следующими ее свойствами.



- Луч, идущий через первый оптический центр, выходит через второй оптический центр с параллельным сдвигом.
- Луч, идущий через первый фокус, преломляется на первой оптической плоскости и далее идет параллельно главной оптической плоскости.
- Луч, падающий на линзу параллельно главной оптической оси, преломляется на второй оптической плоскости и проходит через второй фокус.

## Пример построения изображения



В качестве примера мы взяли полуцилиндр и расположили «предмет» (отрезок  $OA$ ) на его плоской поверхности. Это соответствует эксперименту, который мы описали в начале главы (цилиндр лежит на линейке).

Далее мы покажем, что для полуцилиндра оптические плоскости и фокусы расположены так, как это показано на данном рисунке. Вторая плоскость проходит через «вершину» полуцилиндра, а первая отстоит от нее на  $R/3$  вглубь линзы. Фокусные расстояния полуцилиндра равны  $F = 2R$ . Построение изображения отрезка  $OA$  выполнено при помощи двух лучей. Изображение точки  $A \rightarrow A^*$  находится на пересечении выходящих из линзы отрезков этих лучей. Изображение получилось мнимым, прямым и увеличенным (что мы и наблюдали в опыте).

Запишем основные «оптические» формулы толстой линзы:

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$$

– формула линзы,

$$k = \frac{F}{d-F}$$

– коэффициент увеличения,

$$F = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{(n \cdot (R_2 - R_1) + (n-1) \cdot a)}$$

– фокусное расстояние,

$$h_1 = -F \cdot \frac{a}{R_2} \cdot \frac{n-1}{n}$$

– смещение первой оптической плоскости от первой поверхности линзы,

$$h_2 = -F \cdot \frac{a}{R_1} \cdot \frac{n-1}{n}$$

– смещение второй оптической плоскости от второй поверхности линзы.

В этих формулах:  $f$  – расстояние от предмета до первой оптической плоскости,  $d$  – расстояние от изображения до второй оптической плоскости. При численных расчетах значения величин  $f, d, F, R_1, R_2$ , входящие в формулы, должны подставляться со знаком (+), если величина откладывается «по ходу» луча, и со знаком (-) в противном случае.

Применим эти формулы для полуцилиндра. В этом случае:  $R_1 = \infty, R_2 = -R$

(радиус кривизны второй поверхности откладывается от вершины линзы «против хода» луча), толщина линзы  $a = R$ . После подстановки этих величин в формулы получаем (для стекла  $n = 1,5$ ):

$$F = \frac{R}{n - 1} = 2R,$$

$$h_1 = \frac{R}{n} = \frac{2}{3} \cdot R,$$

$$h_2 = 0.$$

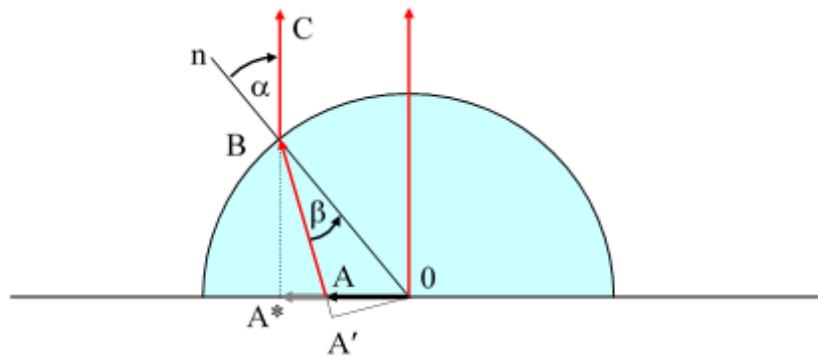
Используя эти значения, можно показать, что изображение предмета, помещенного в плоскую поверхность полуцилиндра, находится в этой же плоскости и увеличено в  $n$  раз. Действительно, подстановка в формулу линзы и формулу коэффициента увеличения значений  $d = -h_1 = -R/n$  и  $F = R/(n - 1)$  дает для положения изображения и коэффициента увеличения следующие результаты:

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{-R/n} = \frac{1}{R/(n - 1)} \rightarrow f = -R,$$

$$k = \frac{OA^*}{OA} = \frac{R}{(n - 1)(R/(n - 1) - R/n)} \rightarrow k = n.$$

Знак  $(-)$  для  $f$  показывает, что изображение смещено от точки Н2 «против хода» луча влево на величину  $R$  и совпадает с положением отрезка  $OA$  (плоскости предмета и его изображения совпадают).

Для школьников этот результат можно получить достаточно элементарно прямым построением хода лучей в полуцилиндре.



Пусть отрезок  $AO$  расположен в плоской поверхности полуцилиндра и правый конец его совмещен с центром кривизны линзы. Через полуцилиндр отрезок будет казаться увеличенным. Нетрудно показать, что его изображение лежит в той же плоскости, что и сам отрезок. Действительно, изображение точки  $(O)$  совпадает с самой точкой, так как лучи, идущие от нее, не преломляются на поверхности линзы. Из этого и следует, что плоскости изображения и предмета совпадают.

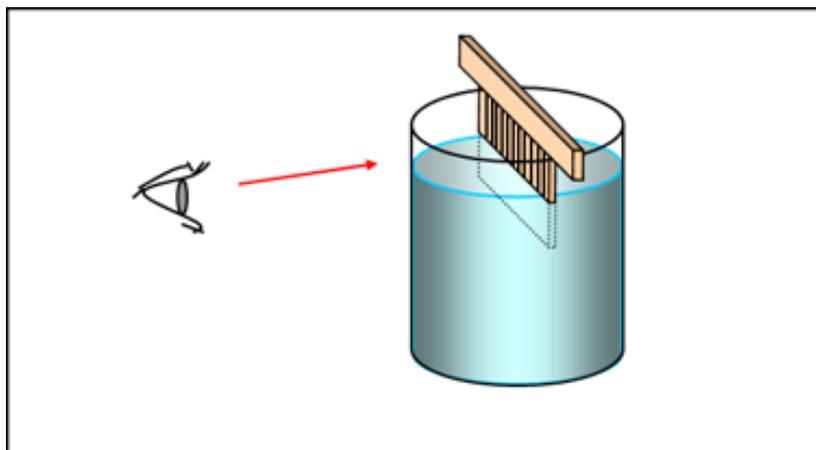
Это облегчает поиск изображения точки А. Для этого достаточно одного луча, идущего от этой точки. Пусть этот луч выходит из линзы параллельно главной оптической оси. Продолжение отрезка ВС определяет точку А\* – изображение точки А. Данное построение удобно выполнять в обратном порядке. Проводят линию А\*С, а точку А определяют в соответствии с величиной показателя преломления ( $A^*O/AO = n$ ). Теперь дополним рисунок построением прямоугольного треугольника ОА'В. Из двух прямоугольных треугольников ОА\*В и ОА'В можно записать:

$$n = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{OA^*/R}{OA'/R} = \frac{OA^*}{OA \cdot \cos(\alpha - \beta)}$$

Для малых углов (при  $OA^* \ll R$ )  $\cos(\alpha - \beta) \approx 1$  и полученное соотношение упрощается:

$$\frac{OA^*}{OA} = k = n$$

Итак, мы доказали удивительное свойство полуцилиндра, возможность использования его как прибора для определения показателя преломления. Но самым интересным является то, что на основе полуцилиндра можно определять и показатель преломления жидкостей. Изготовить жидкий полуцилиндр для таких измерений очень просто. Жидкость наливают в цилиндрический тонкостенный прозрачный сосуд до верха и делят ее линейкой по диаметру (см. рисунок).



Далее проводят измерение показателя преломления так, как это делалось со стеклянным полуцилиндром. При этом на отрезке линейки один из ее сантиметровых штрихов должен быть расположен в центре.

## Эксперимент

Ход выполнения работы.

- Налить в цилиндрический тонкостенный стеклянный сосуд воду до верха. Специальной линейкой «разделить» ее по диаметру. Рассматривая погруженную шкалу через водный полуцилиндр, определить коэффициент ее увеличе-

ния, используя неискаженную верхнюю шкалу линейки так, как это делалось со стеклянным полуцилиндром. Результат измерения занести в таблицу.

### Пример экспериментальных данных

материал	$n = k$
вода	$\frac{13,0 \pm 0,3}{10} = 1,30 \pm 0,03$

### Анализ ошибок

В данном методе анализ ошибок определения показателя преломления является непростой задачей. В основном трудно учесть методическую ошибку, возникающую из-за неточности формы полуцилиндра. Но можно ожидать, что данная методика нечувствительна к искажениям формы. В приведенной выше экспериментальной таблице ошибка определения  $n$  вычислялась только по ошибке измерения длины. Мы оценили абсолютную ошибку измерения длины в 0,3 мм.

## Критерии

	<b>Критерий</b>	<b>МАХ</b>
1	Вывод увеличения $\Gamma=n$	6
2	Описан метод измерения увеличения	2
3	Схема измерений, чертеж установки	2
4	Выполнена оценка размера отрезка, который нужно выбрать для измерения увеличения	2
5	Описан метод измерения показателя преломления погружением миллиметровки/линейки в цилиндрический сосуд -описание метода 1 -чертеж 1 -определение положения диаметра сосуда 1 -фиксация миллиметровки (между линейками и т.п.) 1	4
6	Измерение увеличения сосуда с водой - Выбран отрезок-источник 10-18 мм 26 - Выбран отрезок-источник 5-9 мм 1,56 -отрезок источник меньше 5 мм или больше 18 мм 0,56	2
7	Предложен метод оценки погрешности измерений	2
	<b>Сумма</b>	<b>20</b>

### 3. Комнатный термометр

В калориметр с водой при температуре  $T = 60\text{ }^\circ\text{C}$  опустили плохой теплоемкий термометр, который уже достаточно давно лежал при комнатной температуре. Спустя время он сменил показания на 323 Кельвина. Затем термометр убрали из калориметра и дождались пока прибор снова покажет комнатную температуру. После чего его поместили в калориметр повторно. Какие показания будут на термометре после установления теплового баланса теперь? Комнатную температуру принять равной  $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$ , теплопотерями калориметра во вне можно пренебречь.

#### Решение

Температура термометра в первое погружение в градусах Цельсия:  $T = 323 - 273 = 50\text{ }^\circ\text{C}$ . Пусть теплоемкости воды и термометра равны  $C_{\text{в}}$  и  $C_{\text{т}}$  соответственно. При втором погружении установится температура  $T_2$ . После погружения проходит время, значит устанавливается тепловой баланс.

При первом погружении:

$$C_{\text{в}}(T - T_c) = C_{\text{т}}(T - t) \quad (1)$$

При втором погружении:

$$C_{\text{в}}(T - T_2) = C_{\text{т}}(T_2 - t) \quad (2)$$

Поделим уравнение 1 на уравнение 2

$$\frac{C_{\text{в}}(T - T_c)}{C_{\text{в}}(T - T_2)} = \frac{C_{\text{т}}(T - t)}{C_{\text{т}}(T_2 - t)}$$
$$T_2 = \frac{T_c(T_c - t) + t(T - T_c)}{T - t} \frac{170}{4} = 42.5\text{ }^\circ\text{C}$$

Ответ:

315 К

## Критерии

Задача оценивается до 10 баллов.

3 балла - записано уравнение теплового баланса при первом погружении

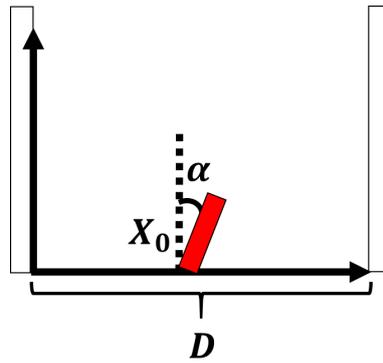
3 балла - записано уравнение теплового баланса при втором погружении

до 4 баллов - посчитаны новые показания прибора

- 1 балл снимается в случае указания градусов Цельсия вместо Кельвинов

- 1 балл снимается за ошибки в подстановк величин

## 4. Супербол



Между двумя вертикальными бесконечными стенками с расстоянием  $D = 0,125$  м друг от друга ставится пушка, вы можете задать для нее начальное положение  $X_0$  и начальный угол выстрела (отклонение от вертикали)  $\alpha$  при начальной скорости  $V_0 = 40$  [м/с]. Считать удар упругим с коэффициентом восстановления скорости перпендикулярной стенке  $k = \frac{1}{2}$ . Тогда какое максимальное количество соударений может быть получено при запуске круглого снаряда? Сопротивлением воздуха и любым трением пренебречь. *Указание: коэффициент восстановления по направлению равен отношению скорости после удара к скорости до удара по этому направлению.*

**Решение:** Первым делом нужно понять куда поставить пушку. Первое соударение неизбежно, потому можно максимально его приблизить и просто поставить пушку к одной стенок, тогда положим  $X_0 = D$ . Скорость от угла нужно максимизировать так, чтобы шарик без стенок пролетел наибольшее расстояние, так он смог бы совершить наибольшее количество ударов, при нахождении такого угла из законов движения тела под углом к горизонту получим  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

Главная идея решения в замечании того, что  $V_x^i t^i = D = \text{const}$ . Ведь тогда можно найти время между  $i$  и  $i+1$  соударением. При том  $V_x^{i+1} = kV_x^i$ , что дает нам общее время вида  $t_\Sigma = \frac{D}{V_x^0} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots \right) = \frac{D(2^{n+1}-2)}{V_0\sqrt{2}}$ . С другой стороны это время ограничено временем полета тела  $t_\Sigma \leq \frac{V_0\sqrt{2}}{g}$ . Тогда подставляя все данные находим, что  $2^n \leq 1281$ , отсюда находим число ударов не забывая про самый первый  $n + 1 = 11$ .

## Критерии

Задача оценивается до 10 баллов.

1 балл - пушка поставлена вплотную к стенке

2 балла - получен оптимальный угол запуска

4 балла - выведено время между двумя соударениями

до 3 баллов - исходя из ограничения времени полета найден ответ

- 1 балл снимается в случае арифметической ошибки

# Олимпиада "Старт в науку". 2023

Файл содержит задачи и предполагаемые решения

## 10 класс

### 1. Провисание цепочки

#### Оборудование:

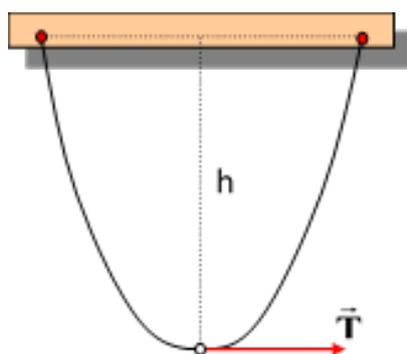
цепочка, весы (на аудиторию), два зажима, линейка, мерная лента, миллиметровка.

#### Задание

#### Теория

Докажите, что форму провисающей цепи можно описать зависимостью  $y = a \cosh \frac{x}{a}$ , где  $a = \text{const}$ .

Указание:  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$



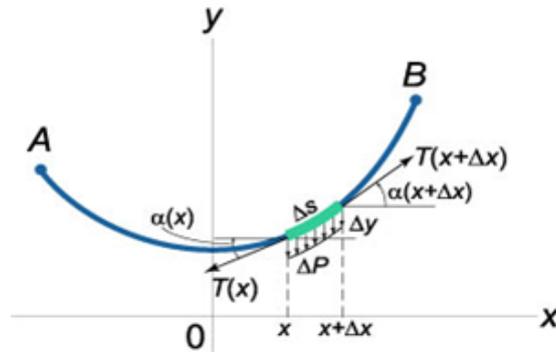
#### Эксперимент

Цепь длиной  $L$  и линейной плотностью  $\rho = \frac{m}{L}$  висит в гравитационном поле Земли (точки подвеса находятся на одном уровне). Определите зависимость силы натяжения в нижней точке цепи от величины «провиса»  $h$ .

## Решение

### Теория

Пусть тяжелая однородная нить подвешена в точках А, В, которые могут находиться на разной высоте.



Рассмотрим равновесие произвольного малого элемента нити длиной  $s$ .

На этот элемент действуют распределенная сила  $\Delta P = \rho g \Delta s$ , где  $\rho$  – объемная плотность материала нити,  $g$  – ускорение свободного падения,  $A$  – площадь поперечного сечения нити, и силы натяжения  $T(x)$  и  $T(x + \Delta x)$ , соответственно, в точках  $x$  и  $x + \Delta x$ .

Условия равновесия выделенного элемента длиной  $s$  в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oy$  записываются в виде:

$$-T \cos \alpha(x) + T(x + \Delta x) \cos \alpha(x + \Delta x) = 0$$

$$-T \sin \alpha(x) + T(x + \Delta x) \sin \alpha(x + \Delta x) - \Delta P = 0.$$

Из первого уравнения видно, что горизонтальная компонента силы натяжения  $T(x)$  всегда постоянна:

$$T \cos \alpha(x) = T_0 = \text{const.}$$

Переходя во втором уравнении к дифференциалам, можно записать его в виде:

$$d(T(x) \cos \alpha(x)) = dP(x).$$

Поскольку  $T(x) = \frac{T_0}{\cos \alpha(x)}$ , то получаем

$$d(T_0 \tan \alpha(x)) = dP(x)$$

или

$$T_0 d(\tan \alpha(x)) = dP(x).$$

Учтем, что  $\tan \alpha(x) = \frac{dy}{dx} = y'$ , так что уравнение равновесия записывается в дифференциальном виде как

$$T_0 d(y') = dP(x)$$

$$T_0 d(y') = \rho g A ds.$$

Элемент длины  $s$  можно выразить по формуле  $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ . В результате получаем дифференциальное уравнение цепной линии:

$$T_0 \frac{dy'}{dx} = \rho g A \sqrt{1 + (y')^2}$$

или

$$T_0 y'' = \rho g A \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Это уравнение допускает понижение порядка. Обозначив  $y' = z$ , представим его в виде уравнения первого порядка:

$$T_0 z' = \rho g A \sqrt{1 + z^2}.$$

Последнее уравнение решается методом разделения переменных.

$$T_0 dz = \rho g A \sqrt{1 + z^2} dx \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{\rho g A}{T_0} dx \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{\rho g A}{T_0} \int dx \Rightarrow$$

$$\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = \frac{x}{a} + C_1.$$

Здесь мы обозначили  $\frac{\rho g A}{T_0}$  через  $1/a$ .

Касательная к цепной линии в нижней точке параллельна оси  $Ox$ . Следовательно,

$$z(x=0) = y'(x=0) = 0$$

Отсюда определим константу  $C_1$ :

$$\ln 1 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Итак, мы имеем следующее уравнение:

$$z + \sqrt{1 + z^2} = \exp\left(\frac{x}{a}\right)$$

Умножим обе части данного уравнения на сопряженное выражение

$$z - \sqrt{1 + z^2}.$$

Получаем:

$$\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) \left(z - \sqrt{1 + z^2}\right) = \left(z - \sqrt{1 + z^2}\right) \exp\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow$$

$$z - \sqrt{1 + z^2} = -\exp\left(\frac{x}{a}\right)$$

Складывая с предыдущим уравнением, находим выражение для  $z = y'$ :

$$z + \sqrt{1 + z^2} + z - \sqrt{1 + z^2} = \exp\left(\frac{x}{a}\right) - \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \Rightarrow$$

$$z = \frac{\exp\left(\frac{x}{a}\right) - \exp\left(-\frac{x}{a}\right)}{2} = \sinh \frac{x}{a} \Rightarrow y' = \sinh \frac{x}{a}.$$

Интегрируем еще раз и получаем окончательное красивое выражение для формы цепной линии:

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

## Эксперимент

Можно рассмотреть силы действующие на половинку цепочки, тогда из равновесия можно получить силу натяжения нити в нижней точки через её силу тяжести и угол между подвесом и цепочкой.

$$T = \frac{mg}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

Динамометр предлагается использовать для измерения веса цепочки. А миллиметровку для измерения угла.

## Критерии

Задача оценивается до 20 баллов.

### Теория (до 10 баллов):

3 балла - записано условие равновесия цепи / элемента цепи

1 балл - сделан вывод о постоянности горизонтальной компоненты силы

3 балла - задача сведена к решению дифференциального уравнения решение которого даст верный ответ

3 балла - решение получено и приведено к необходимому виду

### Эксперимент (до 10 баллов):

3 балла - рассмотрены силы действующие на половину цепочки

2 балла - получено выражение для силы натяжения через угол подвеса и силу тяжести

3 балла - получены силы натяжения более 7 высот провиса, 2 балла более 5 высот,

1 балл - меньше 5 высот

2 балла - построен график зависимости с подписанными осями, единицами измерения и единичным отрезком

## 2. Давление шарика

### Оборудование:

Воздушный шар, нитки, ножницы, линейка, зажим для закрепления на парте, бумага с плотностью  $\rho_0 = 80\text{г/см}^2$ .

### Задание

1. Найдите объём надутого шарика и оцените погрешность измерения этой величины.
2. Опишите метод измерения разности давлений  $\Delta p$  и изобразите схематически установку. Выведите формулу для определения  $\Delta p$ .
3. При надувании шарика вместе с воздухом человек вдыхает в шарик пары воды, которые конденсируются на оболочке. Этот конденсат влияет на точность измерений. Как исключить из расчетов это влияние?
4. Рассчитайте  $\Delta p$ , проведя придуманный Вами эксперимент.
5. Зависимость избыточного давления от размеров шарика аппроксимируется формулой  $\Delta p = \alpha R^n$ , определите коэффициенты  $\alpha$  и  $n$ .

*Молярную массу воздуха принять 29 г/моль, температуру в комнате уточнить у организаторов*

### Решение

Диаметр шара можно определить, обернув нитку вокруг шарика и измерив длину окружности  $d = \frac{L}{\pi}$ , но в таком случае для разных сечений значения будут отличаться. Для увеличения точности необходимо измерить диаметр в трех перпендикулярных сечениях и подставить в формулу  $V = \frac{\pi d^3}{6}$  усредненное значение  $d_{\text{ср}}$ .

Сделаем из линейки, ниток и зажима рычажные весы. В качестве гирек предлагается использовать кусочки бумаги, масса которых полностью определяется их площадью. Из бумаги также делается и чаша для гирь, нитки используются для подвеса.

Чтобы учесть конденсат внутри шарика, который мы вдуваем, мы будем измерять сначала надутый шарик, а потом уже сдутый (конденсат останется внутри шарика). Для большей точности стоит выбирать плечи весов максимально возможными. Для начала замерим длину  $l_1$  плеча, на которое подвешен шарик. Когда будем уравнивать сдутый шарик, оставим массу гирек такой же, подвешивая новый грузик массы  $m_0$  на плечо с шариком. Зафиксируем новое плечо  $l_2$ . Тогда момент, создаваемый этим новым грузиком, компенсирует момент, создаваемый весом воздуха в шарике:  $Pl_1 = m_0l_2$ .

Вес воздуха в шарике равен разности силы тяжести, действующей на него и архимедовой силы:

$$P = mg - V\rho_a g = V\rho_{in}g - V\rho_a g = m_0 l_2 / l_1,$$

где  $\rho_{in}$  - плотность воздуха внутри шарика, а  $\rho_a$  - плотность атмосферного воздуха. Тогда избыточное давление в шарике:

$$\Delta p = \frac{1}{V} \frac{m}{\mu} RT - p_a = \frac{m_0 l_2}{\mu V l_1 g} RT.$$

Отсюда же можно получить и коэффициенты просящие в задании. Прделав эксперимент повторно для разных размеров шара, можно проверить зависимость экспериментально.

## Критерии

Задача оценивается до 15 баллов.

1 балл - описан метод определения объема шарика

1 балл - описана схема установка

1 балл - измерения проводятся сдуванием шарика

1 балл - написано уравнение моментов для рычажных весов

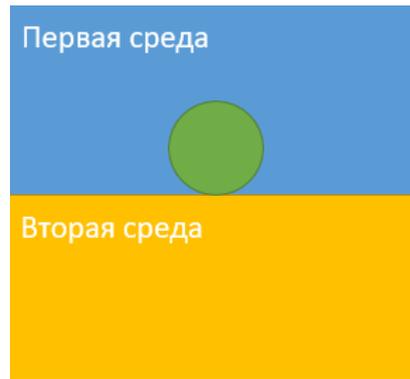
2 балла - получена формула перепада давлений

3 балла - получены перепады давлений 5 и более объемов, 2 балла - 4 и более объемов, 1 балл - меньше 4 объемов

2 балла - построен график зависимости с подписанными осями, единицами измерения и единичным отрезком

3 балла - исходя из линеаризации определены коэффициенты

### 3. Колебания шара



Однородный шар плотности  $\rho$  и радиуса  $R$  находится над границей раздела двух жидких сред, так что его граница касается прямой раздела. Плотности жидкостей  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , а их вязкости  $\eta_1$  и  $\eta_2$  соответственно.

- 1) Найдите конечное положение шара в зависимости от указанных параметров.
- 2) Определите характер движения шарика и запишите уравнение движения.
- 3) Оцените характерное время за которое шар попадает в конечное положение (за которое скорость шара в конечном положении уменьшится в  $n$  раз, где  $n$  вы можете выбрать для вашего удобства), если оно конечно.

#### Решение

1) Если устоялась картина на рисунке, то можно принять  $\rho_2 > \rho_1$ . Для начала можно отсеять граничные случаи, если  $\rho > \rho_2$ , то шарик утонет, а если  $\rho < \rho_1$ , то всплывет. То есть  $h = +\infty$  и  $h = -\infty$  соответственно. Далее будем работать со случаем  $\rho_2 > \rho > \rho_1$ . Для определения конечного положения шара достаточно записать равенство силы тяжести суммарной силе Архимеда при условии равенства суммарного объема объема шарика.

$$\rho V = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2, \quad (1)$$

$$V = V_1 + V_2. \quad (2)$$

Тогда конечное положение шарика можно определить из следующего отношения объемов

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho - \rho_1}. \quad (3)$$

Данное отношение полностью задает конечную координату. На этом моменте решение засчитывалось полностью.

2) Для начала можно отсеять граничные случаи, если  $\rho > \rho_2$ , то шарик тонет, а если  $\rho < \rho_1$ , то всплывает. Далее будем работать со случаем  $\rho_2 > \rho > \rho_1$ . Применяя закон Стокса запишем основное уравнение движения

$$\rho V a = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g (V - V_1) - \rho g V - 6\pi R \eta_m u \quad (4)$$

, где  $\eta_m = \frac{V_1}{V}\eta_1 + (1 - \frac{V_1}{V})\eta_2$ . Безусловно данный процесс можно назвать затухающими колебаниями, так как существует положение равновесия и сила направленная против скорости. Вязкостную силу допускалось брать оценочно.

3) Для начала можно отсеять граничные случаи, если  $\rho > \rho_2$ , то шарик тонет, а если  $\rho < \rho_1$ , то всплывает. Времена в этих случаях бесконечны. Далее будем работать со случаем  $\rho_2 > \rho > \rho_1$ . Введем коэффициент затухания по энергии  $\frac{E_1}{E_2} = n$ . Найдем, когда работа сил вязкого трения:

$$6\pi R\eta_m \int_0^\tau u(t) dt = (1 - \frac{1}{n})\rho V g R/2. \quad (5)$$

Для этого предлагается провести оценку интеграла, как:

$$\int_0^\tau u(t) dt \approx \tau \frac{u_m}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

, где максимальную скорость можно найти из равенства силы тяжести силе вязкого трения. Данная оценка или любая более точная оценки времени засчитывались за полное решение.

## Критерии

Задача оценивается до 10 баллов.

1 балл - рассмотрены различные граничные случаи плотностей

1 балл - получено соотношение объемов в первой среде и второй среде

до 3 баллов - записано уравнение движения

- 1 балл снимается в случае, если формула Стокса не адаптирована под две среды каким-либо оценочным способом

1 балл - сделан вывод о характере движения / затухающих колебаниях

4 балла - получена оценка времени затухания любым релевантным способом

## 4. Отпечатки пальцев



Стеклянная банка высота  $h$  которой равна 15 сантиметров, а диаметр  $d$  равен 7 сантиметров, заполнена водой с коэффициентом преломления  $n_{\text{в}} = 1,33$ . Стенки сделаны из стекла толщиной  $h_c$  равной 1,5 миллиметра с коэффициентом преломления  $n_c = 1,41$ . Под некоторым углом стенки банки кажутся зеркальными, за ними ничего не видно. Но если прислонить к стенке палец, который вы предварительно намочили, то его будет видно.

- 1) Определите диапазоны углов наблюдения, когда стенка кажется зеркальной.
- 2) Объясните почему может быть виден отпечаток пальца за стенкой, также определите диапазон углов.
- 3) Приведите общую формулу диапазона углов для жидкости с произвольным коэффициентом преломления.

### Решение

1) Для определения критического угла последовательно распишем закон Снеллиуса (преломления) на 3 границах: воздух-вода, вода-стекло, стекло-воздух.

$$\sin(\alpha) = 1.33 \times \sin(\beta), \quad (7)$$

$$1.33 \times \cos(\beta) = 1.41 \times \sin(\gamma), \quad (8)$$

$$1.41 \times \sin(\gamma) = \sin(\alpha'). \quad (9)$$

Выразив синус угла падения в стекле через синус изначального угла падения, решим неравенство, исходя из того, что синус конечного угла должен быть меньше или равен 1. Тогда эффект наблюдается при угле падения  $\alpha < 61.16^\circ$ . Помимо этого, не для каждой высоты диапазон углов сохраняется, достаточно показать это ограничением для нижней точки стенки.

2) Отпечаток наблюдается благодаря тому, что теперь конечный коэффициент преломления равен не 1, а коэффициенту преломления воды, то есть 1.33. Уравнение (9) изменяется. Из-за чего появляется диапазон углов, когда отпечаток видно, а всего остального за стенкой нет. Этот диапазон оказывается равен всему диапазону эффекта при  $0 \leq \alpha < 61.16^\circ$ .

3) Записав уравнения уже в общем виде, можно привести решение к следующему виду:  $\sin(\alpha)^2 < n_{\text{ж}}^2 - 1$  .

## Критерии

Задача оценивается до 8 баллов.

2 балла - получен диапазон углов с ошибкой не более 5 процентов

2 балла - проведено качественное рассуждение о влажности пальцев намоченных пальцев и изменении конечного коэффициента преломления

4 балла - приведена общая формула для углов

# Олимпиада "Старт в науку". 2023

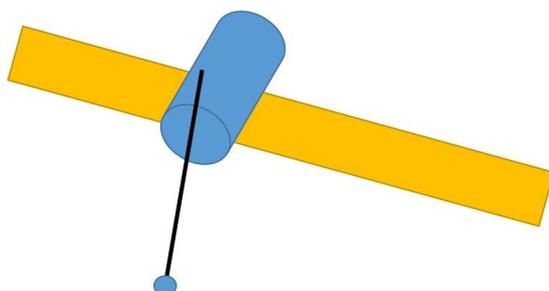
Файл содержит задачи и предполагаемые решения

## 11 класс

### 1. Трение качения

**Оборудование:** цилиндр (свеча), линейка, секундомер, палочка металлическая, пластилин.

#### Задание



#### Теория

Доказать, что период малых колебаний  $T = const \cdot z^\alpha$ ,  
где  $z$  - отклонение центра масс палочки

*Указание: Пренебрегите кинетической энергией грузика*

#### Эксперимент

0) Собрать установку с рисунка.

(цилиндр, сбоку палочка на пластилине, на конце - пластилиновый шарик)

*Указание: Плечо с грузиком делайте не более 10 см, чтобы выполнялось приближение из теории.*

1) Показать зависимость из теории экспериментально и провести линеаризацию, измерить коэффициент  $\alpha$

2) Найти коэффициент трения качения исходя из затухания колебаний

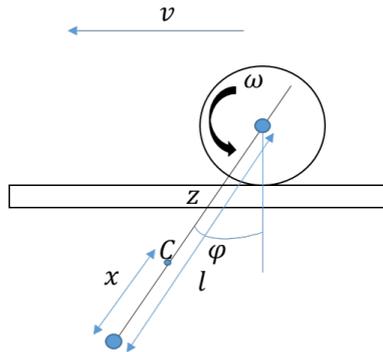
$$F_{\text{тр}} = \frac{K}{R} Mg$$

, где  $M$  - масса цилиндра,  $K$  - коэффициент трения качения,  $R$  - радиус цилиндра.

## Решение

### Часть 1. Период колебаний

При колебательном движении механическая энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергий всех тел, образующих систему.



Будем считать, что кинетической энергией деревянной палочки и центрирующего кусочка пластины на ее конце можно пренебречь в силу малости их массы ( $m \approx 5\text{г}$ ) по сравнению с массой грузика ( $M \approx 100\text{г}$ ).

Тогда кинетическая энергия системы будет определяться только кинетической энергией грузика (цилиндра), которая при качении может быть найдена как сумма его кинетических энергий поступательного и вращательного движений.

$$E = \frac{Mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{M(R\omega)^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \omega^2 = \frac{3MR^2}{4} \omega^2 \quad (1)$$

где  $v = \omega R$  - скорость поступательного движения грузика,  $\omega$  - угловая скорость вращения грузика,  $M$  - его масса,  $J = \frac{MR^2}{2}$  - момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через его центр масс.

Потенциальная энергия системы при отклонении от положения равновесия определяется только увеличением потенциальной энергии палочки, поскольку грузик движется по горизонтальной поверхности:

$$E_{\text{п}} = mgz(1 - \cos \varphi) \approx mgz \frac{\varphi^2}{2}, \quad (2)$$

где  $\varphi$  - угол отклонения палочки от вертикали в процессе малых ( $\varphi \rightarrow 0$ ) крутильных колебаний,  $z$  - расстояние от оси цилиндра до центра масс палочки С. Пренебрегая трением запишем уравнение закона сохранения механической энергии

$$\frac{3MR^2}{4} \omega^2 + mgz \frac{\varphi^2}{2} = \text{const}$$

которое совпадает с уравнением гармонических колебаний. Из этого уравнения следует, что период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3MR^2}{2mgz}} \quad (3)$$

Таким образом, период колебаний обратно пропорционален корню квадратному из  $z$  - расстояния от оси цилиндра до центра масс палочки.

Чтобы не определять экспериментально положение центра масс палочки (с прикрепленным грузом) измерим зависимость периода колебаний от длины части палочки  $l$ , расположенной ниже точки крепления. Расстояние от конца палочки до ее конца обозначим  $x$ . Значение этого параметра можно будет определить непосредственно из измерений зависимости периода колебаний от длины ее части  $l$ . Действительно, зависимость (3) может быть линеаризована следующим образом

$$\frac{1}{T^2} = \frac{2mg}{6\pi^2 MR^2} (l - x) \quad (4)$$

Получив график данной зависимости параметр  $x$  легко определяется как координата точки пересечения графика с осью абсцисс.

Результаты измерений зависимости периода колебаний от длины  $l$ , а также результаты расчетов величины  $\frac{1}{T^2}$  представлены в таблице. Рядом построен график полученной зависимости.

$l, \text{ см}$	$T, \text{ с}$	$1/T^2, \text{ с}^{-2}$
12	2.36	0.179
13	2.14	0.219
14	2.03	0.242
15	1.9	0.276
16	1.83	0.297
17	1.68	0.355
18	1.65	0.367
19	1.61	0.384

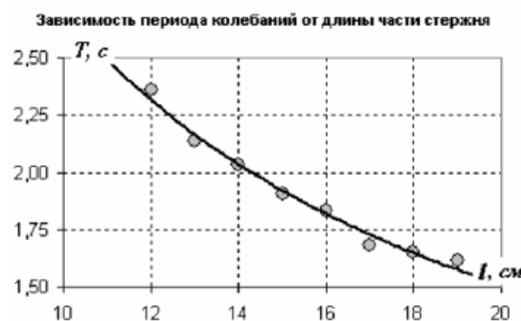
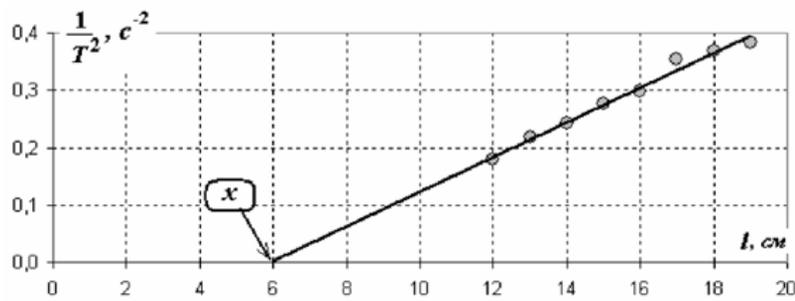


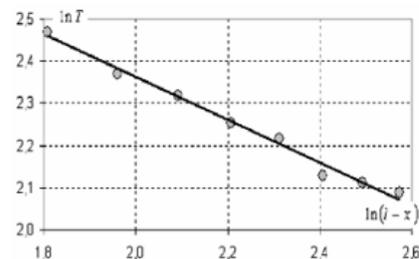
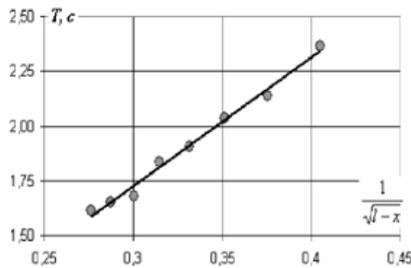
График линеаризованной зависимости (4) близок к прямой линии, что подтверждает полученную формулу для периода колебаний. Иными словами, показатель степени в формуле (1) равен  $\alpha = \frac{1}{2}$



Рассчитанной по этой зависимости (или просто снятое с графика) значение параметра  $= 5,9$  см.

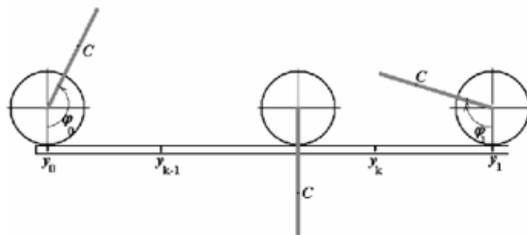
Отметим, что положение центра масс (то есть значение найденного параметра) можно было определить и экспериментально, например, уравновесив стержень на ребре линейки.

Знание этого параметра позволяет провести проверку формулы для периода колебаний и другими способами. Не сложно построить зависимость периода от величины  $\frac{1}{\sqrt{l-x}}$  и убедиться в ее линейности (даже прямой пропорциональности). Можно также построить график в двойном логарифмическом масштабе:  $\ln T$  от  $\ln(l-x)$ . Приведенные ниже рисунки также подтверждают вид найденный вид зависимости периода колебаний от расстояния до центра масс - формулу (3). Отметим, что значение показателя степени, найденное как коэффициент наклона графика в двойном логарифмическом масштабе равно  $\alpha = 0,51 \pm 0,05$



## Часть 2. Затухание колебаний

Выполнение этой части начнем с теоретического описания процесса затухания колебаний, которое происходит вследствие трения качения.



Так как масса цилиндра значительно больше массы палочки, то можно считать, что сила трения качения равна

$$F_{\text{тр}} = \frac{K}{R} Mg,$$

а ее работа

$$A_{\text{тр}} = \frac{K}{R} M g S,$$

где  $S$ - путь, пройденный цилиндром. Работа силы трения равна убыли механической энергии системы. Измерить энергию можно только в точках остановки, в которых кинетическая энергия обращается в нуль, а потенциальная определяется формулой

$$U = -m g z \cos \varphi.$$

В ходе эксперимента следует измерить координаты точек остановок цилиндра  $y_k$ , (удобно в ходе колебаний их просто отметить, а затем уже измерять их положение). Заметим, что в данной части колебания не обязаны быть малыми. Если движение происходит без проскальзывания, то угол отклонения палочки от вертикали определяется по формуле

$$\varphi_k = \frac{y_k}{R}$$

а путь до  $k$ - той остановки равен

$$S_k = |y_0| + |y_1 - y_0| + |y_2 - y_1| + \dots = S_{k-1} + |y_k - y_{k-1}|$$

Таким образом, координаты точек остановки позволяют определить как энергию системы, так и пройденный путь.

Запишем уравнение закона сохранения механической энергии

$$\begin{aligned} U_0 - U_k &= A_k \\ m g z (\cos \varphi_k - \cos \varphi_0) &= \frac{K}{R} M g S_k \end{aligned}$$

Из этого уравнения получим зависимость, которая может быть получена экспериментально

$$-\cos \varphi_k = -\cos \varphi_0 - \frac{K}{R} \frac{M}{m z} S_k \quad (5)$$

Отношение масс палочки и цилиндра может быть выражено из формулы для периода колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3MR^2}{2mgz}} \Rightarrow \frac{M}{mz} = \frac{T^2 g}{6\pi^2 R^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (5), получим

$$-\cos \varphi_k = -\cos \varphi_0 - \frac{K}{R} \frac{T^2 g}{6\pi^2 R^2} S_k.$$

Экспериментально легче измерить длину окружности цилиндра  $2R = L$ , обернув его полоской бумаги. Тем самым получим зависимость, которую можно измерить экспериментально и по которой можно определить коэффициент трения качения

$$-\cos 2\pi \frac{y_k}{L} = -\cos \varphi_0 - \frac{K}{R} \frac{4^2 g}{3L^3} S_k. \quad (6)$$

В таблице 2 представлены результаты измерений координат точек остановки цилиндра, для наглядности эти же результаты показаны на графике.

$k$	$y_k, \text{мм}$	$S, \text{мм}$	$-\cos \varphi_k$
0	47	0	0,886
1	-42	89	0,722
2	36	167	0,450
3	-32	235	0,238
4	30	297	0,127
5	-28	355	0,014
6	26	409	-0,099
7	-24	459	-0,211
8	22	505	-0,320
9	-21	548	-0,373
10	20	589	-0,425
11	-19	628	-0,475
12	17	664	-0,572



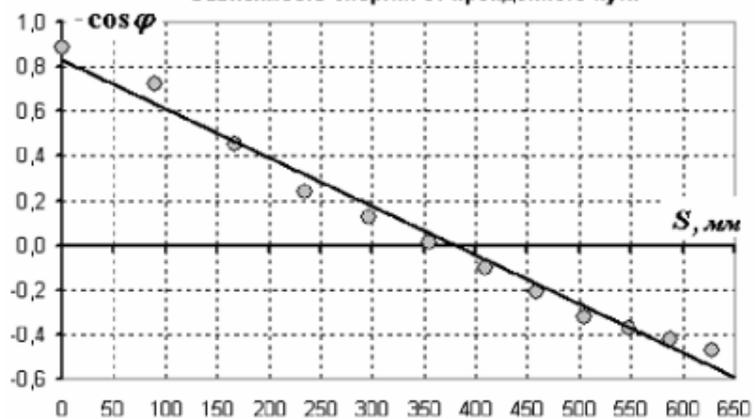
Построенный график зависимости (5) демонстрирует линейную (в пределах погрешности измерений) связь между переменными. Рассчитанный по МНК коэффициент наклона графика оказывается равным

$$a = \frac{\Delta(-\cos \varphi)}{\Delta S} = (-2.19 \pm 0.15) \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-1}$$

Значение этого параметра позволяет рассчитать коэффициент трения качения (в наших экспериментах  $T = 1,9 \text{ с}, L = 111 \text{ мм}$ )

$$a = -\frac{K}{R} \frac{4^2 g}{3L^3} \Rightarrow K = -a \frac{3L^3}{4^2 g} = 2.19 \cdot 10^{-3} \frac{3(111)^3}{4\pi(1.9)^2 \cdot 9.8} \approx 20 \text{ мм}$$

Зависимость энергии от пройденного пути



## Критерии

Задача оценивается до 30 баллов.

### Теория (до 10 баллов):

Энергетический подход:

1 балл - верно записана кинетическая энергия (в условии указано пренебрежение)

1 балл - верно записана потенциальная энергия системы

3 балла - записан закон сохранения энергии

5 баллов - выведена формула для периода колебаний

Иной подход:

5 баллов - выведено уравнение описывающее колебания

5 баллов - в случае подтверждения вышеуказанной зависимости

### Эксперимент (до 20 баллов):

Период колебаний:

3 балла - получены периоды колебаний более 7 длин плеч, 2 балла более 5 длин плеч, 1 балл - меньше 5 длин плеч

2 балла - построен график зависимости с подписанными осями, единицами измерения и единичным отрезком

5 баллов - получен показатель степен  $\alpha$  около 0.5 из линеаризации

Затухание колебаний:

3 балла - получены координаты более 7 точек остановки, 2 балла более 5 точек остановки, 1 балл - меньше 5 точек остановки

2 балла - построен график зависимости с подписанными осями, единицами измерения и единичным отрезком

5 баллов - из угла наклона графика зависимости энергии от пройденного пути получен коэффициент трения качения

## 2. Мыльная пленка

Мыльная пленка с поверхностным натяжением  $\sigma$  натянута на кольцо радиуса  $R$ . На нее равномерно по площади дует ветер со скоростью  $v$ . Плотность воздуха  $\rho$  считать известной. Оценить насколько прогнется пленка в центре, если ветер слабый и какую скорость должен иметь ветер, чтобы выдуть мыльный пузырь.

*Указание: энергия поверхности пленки равна  $\sigma S$ , где  $S$  - площадь поверхности.*

**Решение:** Введем функцию  $z(r)$ , которая показывает насколько сместилась пленка в направлении ветра на расстоянии  $r$  от центра. Так как в центре будет максимальный прогиб, то вблизи  $r = 0$ ,  $z(r)$  будет иметь разложение в ряд  $z(r) = z(0) - \alpha r^2 + \dots$ . Пусть  $L$  - это некоторый "естественный" размер который соответствует расстоянию на которое нужно пройти  $z(r)$ , где  $z(r)$  перестает быть малым изгибом в том плане, что  $z'(r)$  уже сравнимо с единицей и пленка растягивается значительно.

Тогда этот размер должен полностью управлять поведением  $z(r)$  и можно записать, что  $z(r) = z(0) - c_2 L (r/L)^2 + \dots$ . Если ветер слабый, то  $r/L \ll 1$  и из размерных соображений получаем, что все последующие коэффициенты  $c_4 L, c_6 L, \dots$  будут одинаковы по порядку величины в то время как  $(r/L)^4 \ll (r/L)^2$ , что тем более выполняется для высших степеней. Таким образом, мы мотивируем то, что в приближении слабого ветра  $z(r)$  можно считать параболой, что намного упрощает задачу.

Мы имеем условие  $z(R) = 0 \Rightarrow z(r) = z_0(1 - (r/R)^2)$ . Так как ветер дует равномерно и мы считаем, что  $z'(r)$  мало, то ветер просто создает постоянную силу на каждую часть пленки равную  $p \delta S$  в направлении в котором он дует. Такой ситуации эквивалентна механическая система с такой же пленкой в которой вместо ветра пленку изгибает сила тяжести. Условие равновесия заключается в том, что потенциальная энергия пленки, которая складывается из потенциальной энергии поверхностного натяжения  $U_\sigma$  и "потенциальной" энергии сил ветра  $U_{\text{wind}}$  имеет минимум. Так как система находится в минимуме, то  $dU/dz_0 = d(U_\sigma + U_{\text{wind}})/dz_0 = 0$ .

Вычислим

$$\begin{aligned} dU_\sigma &= \sigma dS = 2\sigma \int_0^R d\left(\sqrt{1 + z'(r)^2}\right) 2\pi r dr = \\ &= 2\pi\sigma \int_0^R r d(z'(r)^2) dr = 2\pi\sigma \int_0^R 2r \frac{2z_0 r}{R^2} \frac{2dz_0 r}{R^2} = 4\pi\sigma z_0 dz_0 \end{aligned}$$

где появившаяся двойка в третьем выражении учитывает то, что пленка имеет две поверхности. Вклад ветра равен:

$$dU_{\text{wind}} = -pdV = -p \int_0^R dz_0(1 - (r/R)^2) 2\pi r dr = -\pi p \cdot dz_0 \cdot R^2/2$$

Из условия равновесия получаем, что  $z_0 = pR^2/8\sigma$ . Оценку давления ветра по-

лучаем из уравнения Бернулли - далеко от пленки воздух имеет скорость  $v$  и атмосферное давление, вблизи пленки он тормозит до нулевой скорости и его давление увеличивается на  $\rho v^2/2$ . Итого

$$z_0 = \frac{\rho v^2 R^2}{16\sigma}$$

В пределе сильного ветра, когда вот вот выдуется пузырь, пленка имеет форму колокола и основное изменение площади происходит около  $r = R$  из-за вытягивания. Тогда  $dU_\sigma$  можно оценить как  $4\pi\sigma R dz_0$ , а  $dU_{\text{wind}}$  как  $-p\pi R^2 dz_0$ . До этого мы беспокоились о численных коэффициентах, потому что решение становится вполне точным при малом  $v$ , здесь же точное решение очень сложно и в дальнейшем мы не будем писать численные коэффициенты, считая результат за грубую оценку. Если  $dU_\sigma + dU_{\text{wind}} \leq 0$ , то пленка уже не может компенсировать своими силами натяжения силы давления ветра и выдувается пузырь. Значит условие на то что ветер выдует пузырь имеет вид  $pR^2 dz_0 \geq \sigma R dz_0 \Rightarrow p > \sigma/R$  или переписывая условия на скорость ветра получаем:

$$v \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}}$$

## Критерии

Задача оценивается до 15 баллов.

Энергетический подход:

3 балла - обосновано высказана идея аппроксимации пленки полиномом

до 6 баллов - записано условие минимума потенциальной энергии пленки

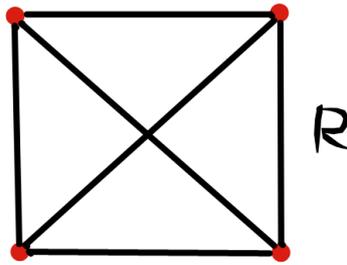
(за математические ошибки снимать до 2 баллов за вычисление каждой из энергий)

6 баллов - получено конечное выражение для прогиба пленки

Иной подход:

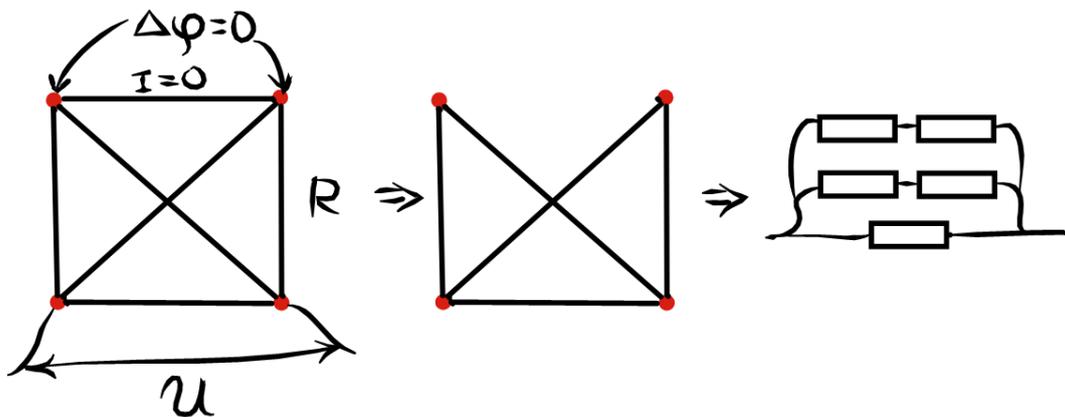
до 15 баллов - баллы выставляются за идеи аналогичные/похожие в энергетическом подходе

### 3. Сопротивление графа



Возьмем  $N$  клемм и соединим каждую с каждой ребрами с сопротивлением  $R$ , как показано на рисунке для примера  $N = 4$ . Найти сопротивление такой схемы между двумя произвольными клеммами.

Решение:



Электрическая схема имеет симметрию перестановки двух произвольных клемм, которые не присоединены непосредственно к напряжению. Значит, потенциалы на этих клеммах должны совпадать и тогда ток между ними не течет. Это позволяет выкинуть ребра, как показано на рисунке и привести схему к решаемому виду. Если клемм всего  $N$ , то легко увидеть, что схема превращается в параллельное соединение одного ребра и  $N - 2$  последовательно соединенных пар ребер. Общее сопротивление находится из

$$\frac{1}{R_{\text{схема}}} = \frac{1}{R} + \frac{N-2}{2R} \Rightarrow R_{\text{схема}} = \frac{2R}{N}$$

## Критерии

Задача оценивается до 10 баллов.

5 баллов - высказана идея симметрии схемы

2 балла - представлена аналогичная цепь из резисторов

3 балла - доведено до ответа