Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук «Физтех-центр»

57-я выездная физико-математическая олимпиада МФТИ

Решения задач

Москва 2018

Ф8.1 В выходной день Вася с родителями пошёл на прогулку. Пройдя большой путь, семья решила сделать привал. После привала первым двинулся в путь Васин папа — он пошёл по прямой со скоростью $V_1 = 3$ км/ч. Через $\Delta t = 2$ минуты Вася с мамой последовали за ним, при этом скорость Васиной мамы была равна $V_2 = 7$ км/ч. Вася же побежал к папе со скоростью $V = 10$ км/ч. Добежав до папы, он развернулся и побежал с прежней скоростью обратно к маме. Так он и бегал между мамой и папой до тех пор, пока мама не догнала папу. Какой путь пробежал Вася?

Решение. Максимальное расстояние между мамой и папой $L = V_1\Delta t$, время бега Васи $T = \dfrac{L}{V_2 - V_1} = \dfrac{V_1\Delta t}{V_2 - V_1}$. Суммарный путь Васи составляет $S = VT = \dfrac{VV_1\Delta t}{V_2 - V_1} = \dfrac{10 \cdot 3 \cdot (2/60)}{7 - 3}$ км $= 0{,}25$ км $= 250$ м.

Ф8.2 Два бегуна бегают по кругу радиуса $R = 50$ м. Первый бегун бежит с постоянной скоростью $V_1 = 12$ км/ч, а второй — с постоянной угловой скоростью $\omega_2 = 0{,}1$ рад/с. Оба бегуна начали бежать одновременно. Сколько кругов пробежал второй бегун за время, в течение которого первый пробежал 2 круга?

Решение. Пусть n_1 и n_2 — числа кругов, которые пробежали первый и второй бегун соответственно. Время бега у обоих бегунов совпадает, поэтому $\dfrac{2\pi \cdot R \cdot n_1}{V_1} = \dfrac{2\pi \cdot n_2}{\omega_2}$, откуда находим $n_2 = \dfrac{\omega_2 \cdot R \cdot n_1}{V_1} = \dfrac{0{,}1 \cdot 50 \cdot 2}{12000/3600} = 3$.

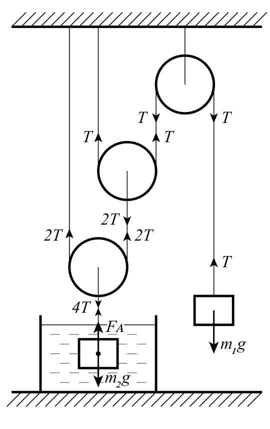
Ф8.3 Груз поднимают вверх с помощью гидравлического пресса. К малому поршню была приложена сила $F = 50$ Н, а сам он переместился на расстояние $h = 50$ см. При этом большой поршень переместился на расстояние $H = 1$ см. Найдите массу M поднятого груза. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. Пусть S — площадь большого поршня, а s — малого. Условие равенства давлений под поршнями: $\dfrac{Mg}{S} = \dfrac{F}{s}$, откуда $\dfrac{S}{s} = \dfrac{Mg}{F}$. Учитывая несжимаемость жидкости, запишем $SH = sh$, поэтому $\dfrac{Mg}{F} = \dfrac{h}{H}$, откуда $M = \dfrac{Fh}{gH} = \dfrac{50 \cdot 0{,}5}{10 \cdot 0{,}01}$ кг $= 250$ кг.

Ф8.4 В цилиндрический сосуд доверху налита вода (плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3). В сосуд помещают металлический шарик плотностью $\rho = 8$ г/см^3, при этом общая масса сосуда с его содержимым увеличилась на $\Delta M = 35$ г. Найти объём выливающейся из сосуда воды.

Решение. Пусть V — объем сосуда, v — объем шарика. Начальная масса содержимого сосуда $M_1 = \rho_в V$, а конечная, соответственно, $M_2 = \rho v + \rho_в(V - v)$. Тогда $\Delta M = M_2 - M_1 = v(\rho - \rho_в)$, откуда $v = \dfrac{\Delta M}{\rho - \rho_в} = \dfrac{35}{8 - 1}$ см$^3 = 5$ см^3.

Ф8.5 Система блоков с грузами, изображенная на рисунке, находится в равновесии. Масса правого груза равна $m_1 = 30$ г, а плотность материала левого груза равна $\rho = 4$ г/см^3. Левый груз погружен в стакан с водой (плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3). Найти массу m_2 левого груза. Нити и блоки считать невесомыми, трением в блоках пренебречь.



Решение. Пусть T — сила натяжения правой нити. Из условия равновесия блоков получаем, что сила натяжения левой нити равна $4T$. Тогда:

$$\begin{cases} T = M_1 g \\ 4T + F_A = m_2 g \end{cases}$$

Сила Архимеда $F_A = g\rho_{\text{в}}V = g\rho_{\text{в}}\dfrac{m_2}{\rho}$. С учетом этого выражения из второго уравнения системы можем записать $4m_1g + g\rho_{\text{в}}\dfrac{m_2}{\rho} = m_2g$, откуда $m_2 = \dfrac{4m_1}{1-\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho}} = \dfrac{4\cdot 30}{1-0{,}25}$ г $= 160$ г.

Ф8.6 В электрический чайник налили $V_1 = 1{,}4$ л воды с начальной температурой $t_1 = 20°C$. После включения чайник закипел через время $T_1 = 5$ мин. За какое время в этом чайнике вскипятится объём воды $V_2 = 0{,}8$ л, у которой начальная температура $t_2 = 30°C$? Потерями тепла пренебречь.

Решение. Пусть W — мощность чайника, $c_{\text{в}}$ — удельная теплоемкость воды. В первом случае $WT_1 = \rho V_1 c_{\text{в}}(t_{\text{кип}} - t_1)$, а во втором, соответственно, $WT_2 = \rho V_2 c_{\text{в}}(t_{\text{кип}} - t_2)$. После деления можем записать $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{V_2(t_{\text{кип}} - t_2)}{V_1(t_{\text{кип}} - t_1)}$, откуда $T_2 = T_1\dfrac{V_2(t_{\text{кип}} - t_2)}{V_1(t_{\text{кип}} - t_1)} = \dfrac{0{,}8(100-30)}{1{,}4(100-20)}\cdot 5$ мин $= 2{,}5$ мин.

Ф8.7 В калориметр, содержащий $m_1 = 5$ кг воды при температуре $t_1 = 27°C$ налили расплавленное железо при температуре его плавления $t_{\text{пл}} = 1530°C$. После установления теплового равновесия выяснилось, что при этом $\Delta m_1 = 0{,}2$ кг воды испарилось, а температура в калориметре стала $t_2 = 100°C$. Какую массу железа m_2 влили в калориметр? Удельная теплоёмкость воды $c_1 = 4{,}19\cdot 10^3$ Дж/(кг$\cdot°C$), железа $c_2 = 0{,}46\cdot 10^3$ Дж/(кг$\cdot°C$). Удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26\cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления железа $\lambda = 2{,}7\cdot 10^5$ Дж/кг.

Решение. Тепло, полученное водой: $Q_1 = c_1m_1(t_2 - t_1) + r\Delta m_1$, а тепло, отданное железом — $Q_2 = \lambda m_1 + c_2m_2(t_{\text{пл}} - t_2)$. Приравнивая $Q_1 = Q_2$, можем записать $c_1m_1(t_2 - t_1) + r\Delta m_1 = \lambda m_2 + {}$ $+ c_2m_2(t_{\text{пл}} - t_2)$, откуда $m_2 = \dfrac{c_1m_1(t_2 - t_1) + r\Delta m_1}{\lambda + c_2(t_{\text{пл}} - t_2)} = \dfrac{4{,}19\cdot 10^3\cdot 5\cdot(100-27) + 2{,}26\cdot 10^6\cdot 0{,}2}{2{,}7\cdot 10^5 + 0{,}46\cdot 10^3\cdot(1530-100)}$ кг $\approx$ $\approx 2{,}1$ кг.

Ф9.1 Ракета запущена с полюса Земли вертикально вверх так, что после выключения двигателей головная ступень поднимается на высоту, равную радиусу Земли. За какое время T головная ступень проходит предпоследний километр участка подъема? Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 10$ м/с^2.

Решение. На высотах порядка радиуса Земли ускорение свободного падения в четыре раза меньше, чем у поверхности. Искомое время равно времени, в течение которого свободно падающее из точки остановки тело, проходит второй километр, поэтому $T = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g/4}}(\sqrt{2} - 1) \approx 12$ с, где $H = 10^3$ м.

Ф9.2 Ведро с водой стоит на весах. Привяжем тонкую нитку к металлическому шару массой $m = 2$ кг и, держа за нитку, медленно опустим шар в воду так, чтобы половина шара была в воде. Плотность металла в 4 раза больше плотности воды, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. На сколько уменьшится или увеличится показание весов?

Решение. После погружения показание весов станет больше на величину, равную архимедовой силе. Действительно, до погружения $N = Mg$, после $\tilde{N} + T = Mg + mg$, где T — сила натяжения нити, а N — сила нормальной реакции ($\vec{P} = -\vec{N}$). Шар в покое $T + F_A = mg$. Из приведенных равенств следует, что $\tilde{N} - N = F_A = \rho_в \frac{V}{2} g = \frac{1}{8} \cdot 4\rho_в V g = \frac{1}{8} mg = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 10 = 2{,}5$ Н.

Ф9.3 В двух стаканах находится вода: в первом — горячая, во втором — холодная. Если из первого стакана перелить во второй ложку воды, подождать до установления и измерить температуры — окажется, что разность температур уменьшилась на 10%. Если теперь ложку воды из второго стакана перелить в первый — разность температур уменьшится еще на 10%. Сколько ложек воды было в каждом из стаканов? Потерями тепла при расчете можно пренебречь, теплоемкость стакана считайте пренебрежимо малой.

Решение. Убыль разности температур на 10% при смешении одинаковых жидкостей происходит при отношении масс 1 : 9, следовательно, холодной воды было 9 ложек, а горячей — 10.

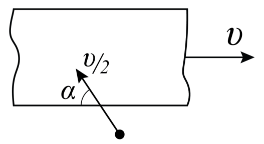
Ф9.4 Тряпичный мешочек с песком сталкивается с гладкой наклонной плоскостью. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Перед столкновением скорость мешочка была горизонтальна и равна по величине $v_0 = 4$ м/с. На какую максимальную высоту h поднимется мешочек в процессе прямолинейного движения по наклонной плоскости? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. В быстром процессе соударения сохраняется параллельная наклонной плоскости составляющая скорости $v_{0,x} = v_0 \cos\alpha$, а нормальная обращается в ноль. Скольжение по наклонной плоскости — равнопеременное движение, проекция ускорения $a_x = -g \sin\alpha$. Тогда из $v_x^2 - v_{0,x}^2 = 2a_x(x - x_0)$ следует $\frac{0 - (v_0 \cos\alpha)^2}{2} = -g \sin\alpha \cdot L = -gh$, откуда $h = \frac{(v_0 \cos\alpha)^2}{2g} = 0{,}6$ м.

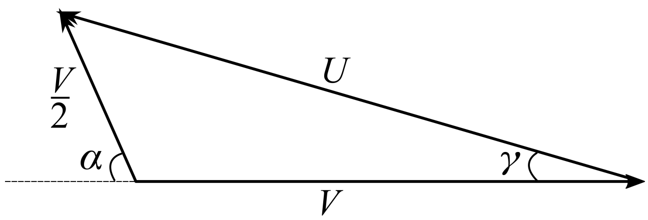
Ф9.5 Шайба массы m лежит на доске массы M. Коэффициент трения скольжения шайбы по доске равен μ. По шайбе производят горизонтальный удар, после чего она движется по доске с начальной скоростью V_0. На какое расстояние S переместится доска за время скольжения шайбы по доске? Ускорение свободного падения g. Доска находится на гладкой горизонтальной поверхности.

Решение. После удара на систему тел «шайба+доска» горизонтальные внешние силы не действуют, тогда по закону сохранения импульса за время скольжения скорость шайбы уменьшится до величины $V = \frac{m}{m + M} V_0$. Из второго закона Ньютона следует, что в процессе торможения величина ускорения шайбы $a = \mu g$. Продолжительность движения шайбы по доске $T = \dfrac{V_0 - V}{a} = \dfrac{m}{m+M}\dfrac{V_0}{\mu g}$. Перемещение доски за это время $S = \dfrac{VT}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Mm}{(m+M)^2}\dfrac{V_0^2}{\mu g}$.

Ф9.6 Широкая лента транспортера находится в одной горизонтальной плоскости с поверхностью стола и движется с постоянной скоростью $v = 1{,}2$ м/с (см. рис.). На ленту попадает небольшая коробка, двигавшаяся по столу со вдвое меньшей скоростью, направленной под углом α ($\cos\alpha = 1/9$) к краю ленты. Коэффициент трения скольжения коробки по ленте $\mu = 0{,}14$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Через какое время τ коробка остановится на ленте?

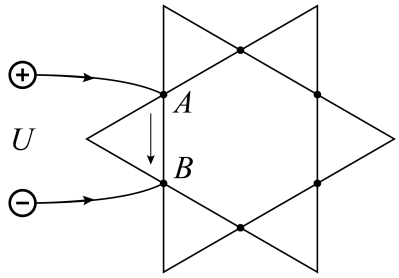


Решение. В ИСО, связанной с лентой, коробка движется с начальной скоростью $\vec{U}$ под действием силы тяжести mg, силы нормальной реакции $N = mg$ и силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$. Эти силы, постоянные по величине и направлению, сообщают коробке ускорение $a_{\text{отн}}$, величина которого $a_{\text{отн}} = \mu g$. Тогда в системе ленты коробка движется по прямой равнозамедленно. Величину начальной скорости в подвижной ИСО найдем из закона сложения скоростей (см. рис.) $U = \sqrt{\left(\dfrac{v}{2}\right)^2 + v^2 + 2v\dfrac{v}{2}\cos\alpha} = \dfrac{7}{6}v$.



Время движения до остановки $\tau = \dfrac{U}{\mu g} = \dfrac{7}{6}\dfrac{v}{\mu g} = \dfrac{7 \cdot 1{,}2}{6 \cdot 0{,}14 \cdot 10} = 1{,}0$ с.

Ф9.7 Два одинаковых равносторонних треугольника (сопротивление каждой из сторон $R = 30$ Ом) спаяли так, что получился контур, который подключили к источнику постоянного напряжения $U = 50$ В. (см. рис.). Найдите силу I тока в подводящих проводах. Сопротивление подводящих проводов пренебрежимо мало.



Решение. Сопротивление одной стороны маленького треугольника $r = \dfrac{R}{3} = 10$ Ом. Эквивалентное сопротивление одного маленького треугольника $\dfrac{2}{3}r$. Сопротивление пяти таких последовательно соединенных треугольников $\dfrac{10}{3}r$ Ом. Тогда эквивалентное сопротивление между точками A и B составляет $R_{AB} = \dfrac{5}{9}r = \dfrac{50}{9}$ Ом. Сила тока в подводящих проводах $I = \dfrac{U}{R_{AB}} = 9$ А.

Ф10.1 Наблюдатель, стоявший у края колодца бросил в него камень. Через время $t_0 = 2{,}7$ с он услышал звук от удара камня о воду в колодце. Найти расстояние от места броска до уровня воды в колодце, если камень падал в колодец без начальной скорости. Скорость звука в воздухе $V = 332$ м/с, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Силу сопротивления не учитывать.

Решение. Пусть h — глубина колодца, t_1 — время падения камня, а t_2 — время распространения звука. По условию $h = \dfrac{gt_1^2}{2}$, $h = Vt_2$, $t_1 + t_2 = t_0$. Из этих равенств для времени t_2 находим уравнение $t_2^2 - 2\left(t_0 + \dfrac{V}{g}\right)t_2 + t_0^2 = 0$. При данных в условии численных значениях для времени t_2 получим $t_2 \approx 0{,}1$ с. Глубина колодца $h = Vt_2 \approx 33$ м.

Ф10.2 Две одинаковые массивные платформы катятся по рельсам друг за другом с одинаковой скоростью V_0. Человек, стоявший на задней платформе, отталкивается от нее и перепрыгивает на переднюю платформу. В результате задняя платформа стала двигаться со скоростью $0{,}99V_0$. Найти отношение скорости движения передней платформы с человеком к ее начальной скорости. Масса человека в 5 раз меньше массы платформы.

Решение. Пусть m и M — масса человека и платформы соответственно, kV_0 — скорость человека после прыжка с задней платформы, V_1 — скорость передней платформы с человеком. Из закона сохранения импульса для задней и передней платформ имеем два уравнения:

$$\begin{cases} (m+M)\cdot V_0 = m\cdot k\cdot V_0 + 0{,}99M\cdot V_0 \\ m\cdot k\cdot V_0 + M\cdot V_0 = (m+M)\cdot V_1 \end{cases}$$

Из первого уравнения при условии $\dfrac{M}{m} = 5$ находим $k = \dfrac{21}{20}$, а из второго $\dfrac{V_1}{V_0} = \dfrac{121}{120}$.

Ф10.3 Первый шарик, скользивший по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью V_0, сталкивается со вторым шариком, который покоился на той же поверхности. После центрального упругого удара шарики движутся в противоположные стороны. При этом скорость второго шарика, который покоился до столкновения, в 2 раза больше скорости первого шарика. Найти отношение кинетической энергии движения второго шарика к энергии движения первого шарика после столкновения.

Решение. Пусть m_1 и m_2 — массы первого и второго шарика соответственно, V_1 и V_2 — их скорости после столкновения. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$\begin{cases} m_1V_0 = m_1V_1 + m_2V_2 \\ \dfrac{m_1V_0^2}{2} = \dfrac{m_1V_1^2}{2} + \dfrac{m_2V_2^2}{2} \end{cases}$$

Из этих уравнений $V_1 = V_0\cdot\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$; $V_2 = V_0\cdot\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}$. По условию $m_2 > m_1$, откуда из условия $\dfrac{V_2}{|V_1|} = 2$ получаем $\dfrac{m_2}{m_1} = 2$, $|V_1| = \dfrac{V_0}{3}$; $V_2 = \dfrac{2V_0}{3}$. Окончательно, $\dfrac{\frac{m_2V_2^2}{2}}{\frac{m_1V_2^2}{2}} = 8$.

Ф10.4 Шарик, подвешенный на нити в поле тяжести, совершает колебания с большой угловой амплитудой. Во время этих колебаний максимальная сила натяжения нити в 4 раза больше минимальной. Найти максимальное центростремительное ускорение, с которым движется шарик во время этих колебаний.

Решение. Пусть m — масса шарика, l — длина нити, φ_0 — максимальный угол отклонения нити от вертикали. Минимальная сила натяжения нити при скорости шарика, равной нулю, равна $N_{min} = mg\cos\varphi_0$. Максимальная сила натяжения при максимальной скорости шарика $N_{max} = mg + \dfrac{mV^2}{l}$. Из закона сохранения энергии $\dfrac{mV^2}{2} = mgl(1-\cos\varphi_0)$, откуда $N_{max} = mg(3 - 2\cos\varphi_0)$. По условию $\dfrac{N_{max}}{N_{min}} = 4$, откуда $\cos\varphi_0 = \dfrac{1}{2}$. При максимальной скорости у шарика есть только центростремительное ускорение $\dfrac{V^2}{l}$. При $\cos\varphi_0 = \dfrac{1}{2}$ из ЗСЭ и выражения для максимальной силы натяжения нити находим $\dfrac{V^2}{l} = a_{max} = g$.

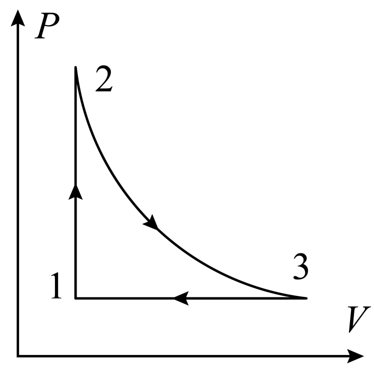
Ф10.5 Советские автоматические межпланетные станции, совершавшие посадку на поверхность Венеры в прошлом веке, установили, что атмосфера планеты состоит в основном из углекислого газа, плотность которого вблизи поверхности составляет $\rho = 7$ кг/м^3, а температура равна $500°C$. Вблизи поверхности были также обнаружены водяные пары. По оценкам общая масса воды (в виде пара) в атмосфере Венеры может составлять 10^{-5} от массы всей атмосферы. По современным данным радиус Венеры составляет $r_0 = 6200$ км, ускорение свободного падения на поверхности $g = 8{,}5$ м/с^2. Найти по этим данным массу воды, содержащейся в атмосфере Венеры.

Решение. Пусть M — масса атмосферы Венеры, $m_в$ — масса паров воды, P — давление углекислого газа, $\mu = 44\cdot10^{-3}$ кг/моль — его молярная масса. По условию имеем уравнения: $P = \dfrac{\rho}{\mu}RT$, $P = \dfrac{Mg}{4\pi r_0^2}$, $m_в = 10^{-5}M$. Находим тогда $m_в = 10^{-5}\cdot 4\pi r_0^2 g \cdot \dfrac{\rho}{\mu}\cdot RT \approx 5{,}8\cdot10^{14}$ кг.

Ф10.6 В цилиндре под поршнем при комнатной температуре находится воздух, водяной пар и вода (жидкость). Отношение массы воды к массе водяного пара $\dfrac{m_в}{m_п} = k = 0{,}5$. В изотермическом процессе объём цилиндра увеличивается в $\beta = 2{,}5$ раза. Найти относительную влажность воздуха φ в цилиндре в конечном состоянии. Объёмом, который занимала вода в начальном состоянии, пренебречь.

Решение. Пусть P_H — давление насыщенного пара, V_1 — его начальный объем, φ — относительная влажность воздуха. Для пара в начале $P_H\cdot V_1 = \nu_п\cdot RT$, в конце $\varphi P_H\beta V_1 = (\nu_п + \nu_в)RT$. Отсюда находим $\varphi = \dfrac{1}{\beta}\left(1 + \dfrac{\nu_в}{\nu_п}\right) = \dfrac{1}{\beta}\left(1 + \dfrac{m_в}{m_п}\right) = \dfrac{k+1}{\beta} = 0{,}6$.

Ф10.7 В тепловой машине «рабочим телом» является одноатомный идеальный газ. Машина работает по циклу, состоящему из следующих процессов: изохорического нагрева 1-2, адиабатического расширения 2-3 и процесса изобарического охлаждения 3-1 (см. рис.). В изобарическом процессе объём газа изменяется 8 раз. Найти КПД цикла η.
Указание. В адиабатическом процессе давление газа P и его объём V связаны уравнением $P^3V^5 = const$.



Решение. Из уравнения состояния и условия $P^3V^5 = const$ можно получить $T^3V^2 = const$, откуда $T_2^3V_2^2 = T_3^3V_3^2$. По условию $\dfrac{V_3}{V_2} = 8$, поэтому $T_2 = 4T_3$. На изобаре по условию $T_3 = 8T_1$, значит, $T_2 = 4T_3 = 32T_1$. КПД $\eta = 1 - \dfrac{Q_{31}}{Q_{12}} = 1 - \dfrac{\frac{5}{2}R(T_3-T_1)}{\frac{3}{2}R(T_2-T_1)} = 1 - \dfrac{5R\cdot7T_1}{3R\cdot31T_1} = \dfrac{58}{93}$.

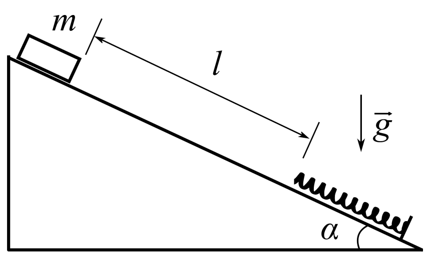
Ф11.1 В кастрюлю с водой опустили кусок льда массой $m = 700$ г. Лед стал плавать, не касаясь дна и стенок кастрюли. Вода не переливается через край кастрюли. Стенки кастрюли вертикальны, площадь дна $S = 350$ см^2. На сколько сантиметров повысился уровень воды в кастрюле? Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

Решение. Увеличение уровня воды в кастрюле приводит к увеличению давления на дно. С другой стороны, давление повышается на $\dfrac{mg}{S}$, откуда $\rho g H S = mg$. Окончательно находим $H = \dfrac{m}{\rho S} = 2$ см.

Ф11.2 Автомобиль движется прямолинейно из состояния покоя и проходит участок длиной S с постоянным ускорением a_1, а второй участок длиной $5S$ — с постоянным ускорением a_2. Скорость автомобиля в конце первого участка $V_1 = 8$ м/с, а в конце второго $V_2 = 16$ м/с. Найти отношение ускорений $\dfrac{a_1}{a_2}$.

Решение. Для первого участка можем записать $2a_1 S = V_1^2$, а для второго, соответственно, $2a_2 \cdot 5S = V_2^2 - V_1^2$.

Ф11.3 Брусок массой m удерживают на гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α на расстоянии l от легкой пружины жесткостью k (см. рис.). Один конец пружины закреплен. Брусок отпускают, он скользит и ударяется о пружину. Найти величину максимальной деформации пружины. Все движения происходят в одной вертикальной плоскости.



Решение. Из закона сохранения энергии $mgl\sin\alpha = \dfrac{kx^2}{2} + (-mgx\sin\alpha)$, откуда окончательно находим $x = \dfrac{1}{k}(mg\sin\alpha + \sqrt{mg\sin\alpha(mg\sin\alpha + 2kl)})$.

Ф11.4 В герметичном сосуде находится молекулярный азот. В результате нагрева часть азота диссоциировала на атомы. При этом температура (по шкале Кельвина) увеличилась в 3 раза, а давление возросло в 3,5 раза. Какая часть от начальной массы азота диссоциировала на атомы?

Решение. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона $PV = \dfrac{m}{\mu}RT$ для начального момента до нагрева и диссоциации. Пусть диссоциировала доля азота x. Тогда после диссоциации $3{,}5PV = \left(\dfrac{m - xm}{\mu} + \dfrac{xm}{\mu/2}\right) R \cdot 3T$. Отсюда можем найти $x = \dfrac{1}{6}$.

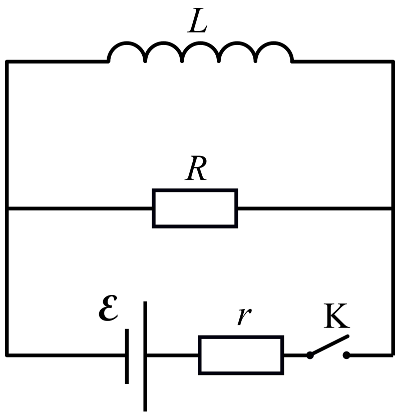
Ф11.5 При медленном изотермическом сжатии $m = 5$ г водяного пара при температуре $100°C$ объем пара уменьшился в 3 раза, а давление возросло в 2 раза. Найти начальный объем пара. Ответ выразить в литрах. Пар считать идеальным газом.

Решение. Часть пара сконденсируется, пар станет насыщенным при давлении $P_0 \approx 10^5$ Па. Тогда в начальный момент уравнение Менделеева-Клапейрона $\dfrac{P_0}{2}V = \dfrac{m}{\mu}RT$. Находим тогда $V = \dfrac{2m}{\mu P_0}RT \approx 17 \cdot 10^{-3}$ м$^3 = 17$ л.

Ф11.6 Проводящий уединенный шарик радиусом R с зарядом Q имеет потенциал $\varphi_1 = 500$ В. Каким станет потенциал шарика, если он окажется внутри тонкостенного проводящего полого шара радиусом $5R$ и с зарядом $4Q$? Центры шарика и полого шара совпадают.

Решение. Потенциал уединенного шарика $\varphi_1 = k\dfrac{Q}{R}$. Во втором случае потенциал этого шарика станет равным $\varphi_2 = k\dfrac{Q}{R} + k\dfrac{4Q}{5R} = \dfrac{9}{5}k\dfrac{Q}{R} = 900$ В.

Ф11.7 В цепи, схема которой показана на рисунке, ключ К разомкнут. Внутреннее сопротивление источника «содержится» в r. Величины R, $\mathscr{E}$, L считать известными. Ключ замыкают. Оказалось, что установившийся ток через источник в 4 раза больше тока через источник сразу после замыкания ключа.



1) Найти r.

2) Найти заряд, протекший через резистор R после замыкания ключа.

Решение. 1) Установившийся ток в цепи $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{r}$. Ток через источник сразу после замыкания ключа $I_0 = \dfrac{\mathscr{E}}{r+R}$. По условию $I_1/I_0 = 4$, откуда $r = \dfrac{R}{3}$. 2) Можно показать, что $qR = LI_1$. Тогда $q = \dfrac{LI_1}{R} = \dfrac{L\mathscr{E}}{Rr} = \dfrac{3L\mathscr{E}}{R^2}$.

M7.1 У весов сдвинута стрелка, то есть они всегда показывают на фиксированное число граммов больше (или меньше), чем истинный вес. Когда на весы положили дыню, весы показали 3 кг. Когда на весы положили арбуз, весы показали 5 кг. Когда взвесили арбуз вместе с дыней, весы показали 7 кг. Сколько кг покажут весы, если на них поставить гирю в 2 кг?

Ответ. 3 кг.

Решение. Пусть весы показывают на x больше (x может быть отрицательным), дыня весит y кг, а арбуз — z кг. Тогда $x+y=3$, $x+z=5$, $x+y+z=7$. Отсюда $x=1$. Значит, весы покажут $2+1=3$ кг.

M7.2 На плоскости выбраны точки A, B, C, D так, что $BC \parallel AD$ и биссектрисы углов BAD и CDA пересекаются на отрезке BC. Докажите, что $BC = AB + CD$.

Решение. Пусть данные биссектрисы пересекаются в точке P. Из параллельности следует, что $\angle BPA = \angle PAD$. Поэтому $\angle BPA = \angle PAD = \angle PAB$. Отсюда $AB = BP$. Аналогично $DC = PC$, значит, $BC = BP + PC = AB + CD$.

M7.3 С записанным на доске числом можно проделывать следующие операции:

1) к одной цифре прибавить 1, а из другой вычесть 1;

2) к одной цифре прибавить 1, а из другой вычесть 4;

3) к одной цифре прибавить 4, а из другой вычесть 1.

Операцию разрешается проделывать, только если в результате также получатся цифры (например, из цифры 2 нельзя вычесть 4). Можно ли при помощи указанных операций из числа 9876543210 получить число 1234567891?

Ответ. Нельзя.

Решение. Заметим, что при указанных операциях сумма цифр числа либо не изменяется, либо изменяется на 3. Поэтому разность сумм цифр у исходного числа и полученного числа должна делиться на 3. Но разность сумм цифр у чисел 1234567891 и 9876543210 равна 1.

M7.4 Произведение пяти натуральных чисел оканчивается на 1234. Может ли их сумма равняться 9999?

Ответ. Не может.

Решение. Заметим, что число, оканчивающееся на 34, делится на 2, но не делится на 4. Поэтому среди пяти данных чисел ровно одно четное и четыре нечетных. Но тогда их сумма четна и не может равняться 9999.

M7.5 В зале 2018 человек — лжецов и рыцарей (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из них сказал: «Не считая меня, в зале больше лжецов, чем рыцарей». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть в зале?

Ответ. 1009 рыцарей.

Решение. Заметим, что если в зале 1009 рыцарей и 1009 лжецов, все смогли сказать требуемую фразу. Если же рыцарей хотя бы 1010, то лжецов не больше 1008, и ни один рыцарь не может сказать требуемую фразу, так как $1009 > 1008$.

Замечание. Можно доказать, что единственная ситуация, удовлетворяющая условию, — в зале поровну лжецов и рыцарей.

М8.1 Из одного пункта в одном направлении через каждые полчаса выезжают велосипедисты. Первый едет со скоростью 10 км/ч, второй — 8 км/ч. Найдите скорость третьего велосипедиста, если известно, что он обогнал первого велосипедиста на 4 часа позже, чем второго.

Ответ. 12 км/ч.

Решение. Когда выезжает третий велосипедист, первый будет от него на расстоянии 10 км, а второй — 4 км. Если скорость третьего равна x км/ч ($x > 10$), то он догонит второго через $\dfrac{4}{x-8}$ часа, а первого — через $\dfrac{10}{x-10}$ часа. Значит, $\dfrac{4}{x-8}+4=\dfrac{10}{x-10}$. Корнями этого уравнения (сводящегося к квадратному) будут числа 7,5 (не подходит) и 12.

М8.2 Сумма двух натуральных чисел оканчивается на 4321. Вася увеличил каждое из них на 50 и перемножил полученные числа. Может ли получившееся произведение также оканчиваться на 4321?

Ответ. Не может.

Решение. Так как сумма двух натуральных чисел нечетна, одно из этих чисел четно, а другое нечетно. После прибавления 50 четность чисел не изменится, но произведение четного и нечетного числа четно, и не может оканчиваться на 4321.

М8.3 С записанным на доске числом можно проделывать следующие операции:

1) к одной цифре прибавить 1, а из другой вычесть 1;

2) к одной цифре прибавить 2, а из другой вычесть 5;

3) к одной цифре прибавить 5, а из другой вычесть 2.

Операцию разрешается проделывать, только если в результате также получатся цифры (например, из цифры 2 нельзя вычесть 5, а к цифре 9 нельзя прибавить 5). Можно ли при помощи указанных операций из числа 9876543210 получить число 1234567891?

Решение. Заметим, что при указанных операциях сумма цифр числа либо не изменяется, либо изменяется на 3. Поэтому разность сумм цифр у исходного числа и полученного числа должна делиться на 3. Но разность сумм цифр у чисел 1234567891 и 9876543210 равна 1.

М8.4 В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D. Оказалось, что $AC = CD = DB$. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что AC в два раза больше одной из высот треугольника DBC.

Ответ. 1. $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.
2. $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 15^\circ$, $\angle C = 135^\circ$.

Решение. Рассмотрим возможные случаи. Пусть DH — высота треугольника ABC, которая вдвое короче стороны AC. В прямоугольном треугольнике BDH катет DH вдвое короче гипотенузы, поэтому $\angle DBH = 30^\circ$. Но тогда $\angle BDC = 180^\circ - 2\angle DBH = 120^\circ$. Значит, $\angle CAB = \angle CDA = 60^\circ$. Тогда $\angle BCA = 90^\circ$.
Пусть теперь CK — высота треугольника ABC, которая вдвое короче стороны AC (высота, проведенная из точки B, имеет такую же длину). Это высота равнобедренного треугольника ACD, поэтому угол AKC — прямой, и тогда $\angle CAK = \angle CDA = \angle CAB = 30^\circ$. Значит, $\angle CDB = 150^\circ$, откуда $\angle DCB = \angle DBC = \angle ABC = 15^\circ$ и $\angle BCA = 135^\circ$.

М8.5 В зале 2018 человек — лжецов и рыцарей (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из них сказал: «Не считая меня, в зале больше лжецов, чем рыцарей». Какое наибольшее количество лжецов могло быть в зале?

Ответ. 1009 лжецов.

Решение. Заметим, что если в зале 1009 рыцарей и 1009 лжецов, все смогли сказать требуемую фразу. Если же лжецов хотя бы 1010, то рыцарей не больше 1008, и ни один лжец не может сказать требуемую фразу, так как $1009 > 1008$.

Замечание. Можно доказать, что единственная ситуация, удовлетворяющая условию, — в зале поровну лжецов и рыцарей.

М9.1 Когда в произведении двух натуральных чисел первый из множителей увеличили на 1, а второй — уменьшили на 1, произведение увеличилось на 2018. А как бы оно изменилось, если бы, наоборот, первый множитель уменьшили на 1, а второй — увеличили на 1?

Ответ. Уменьшилось бы на 2020.

Решение. Пусть данные числа равны x и y. По условию, $(x+1)(y-1)-xy=2018$, откуда $y-x=2019$. Но тогда $(x-1)(y+1)-xy=x-y-1=-2020$. Значит, произведение уменьшилось бы на 2020.

М9.2 Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+ax+bc=0$, x_2, x_3 — корни уравнения $x^2+bx+ac=0$. Докажите, что x_1, x_3 — корни уравнения $x^2+cx+ab=0$, если $ac\neq bc$.

Решение. По теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=bc$, $x_3+x_2=-b$, $x_3x_2=ac$. По условию, $ac-bc=(a-b)c\neq 0$. Значит, $a\neq b$, $c\neq 0$. Вычитая из первого равенства третье, а из второго четвертое, получаем уравнения $x_1-x_3=b-a$ и $x_2(x_1-x_3)=(b-a)c$. Поэтому $x_2=c$, и тогда $x_3=a$, $x_1=b$, $a+b+c=0$, откуда и следует утверждение задачи.

М9.3 Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части. Докажите, что одна из сторон треугольника ABC в два раза больше другой.

Решение. Пусть данная окружность касается сторон AB, BC, CA соответственно в точках K, L и N. Без ограничения общности можно считать, что $AB<CB$, тогда точка N лежит на отрезке AM. По свойству касательных к окружности $AN=AK=a$, $CN=CL=c$. Пусть $BM=3m$. По теореме о касательной и секущей $BL^2=2m\cdot m=2m^2$. Отсюда $BK=BL=m\sqrt{2}$. Аналогично $MN=m\sqrt{2}$. Но $AM=CM$. Значит, $a+m\sqrt{2}=c-m\sqrt{2}$, откуда $c=a+2m\sqrt{2}$. Тогда $AC=a+c=a+a+2m\sqrt{2}=2(a+m\sqrt{2})=2AB$, откуда и следует утверждение задачи.

М9.4 Докажите, что для любых натуральных чисел m и k найдется такое натуральное число n, что $(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^{2^k}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

Решение. Докажем сначала, что для любого натурального m найдется натуральное t такое, что $(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^2=\sqrt{t+1}-\sqrt{t}$.
Действительно, $(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^2=m+1-2\sqrt{m+1}\sqrt{m}+m=2m+1-2\sqrt{(m+1)m}=$ $=\sqrt{(2m+1)^2}-\sqrt{4(m+1)m}=\sqrt{4m^2+4m+1}-\sqrt{4m^2+4m}$. То есть $t=4m^2+4m$.
Доказываемое утверждение следует из того, что $(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^{2^k}=\left((\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^2\right)^{2^{k-1}}=$ $=(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})^{2^{k-1}}=\ldots=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

М9.5 За круглый стол сели 7 мальчиков и 7 девочек. За один шаг можно поменять местами любых двух детей. При каком наименьшем N можно утверждать, что при любой рассадке, сделав не более N шагов можно добиться того, чтобы мальчики и девочки за столом чередовались?

Ответ. 3.

Решение. Пронумеруем места числами от 1 до 14. Задача будет решена, если все девочки будут сидеть на местах одной четности. Заметим, что либо на четных, либо на нечетных местах сидит не более 3 девочек. Поменяв их местами с мальчиками, получим требуемое. Если же девочки сначала сидят на местах с номерами 1, 2, …, 7, нам потребуется пересадить не менее 3 из них, то есть сделать не менее 3 шагов.

M10.1 Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+ax+bc=0$, x_2, x_3 — корни уравнения $x^2+bx+ac=0$. Докажите, что x_1, x_3 — корни уравнения $x^2+cx+ab=0$, если $ac \neq bc$.

Решение. По теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=bc$, $x_3+x_2=-b$, $x_3x_2=ac$. По условию, $ac-bc=(a-b)c \neq 0$. Значит, $a \neq b$, $c \neq 0$. Вычитая из первого равенства третье, а из второго четвертое, получаем уравнения $x_1-x_3=b-a$ и $x_2(x_1-x_3)=(b-a)c$. Поэтому $x_2=c$, и тогда $x_3=a$, $x_1=b$, $a+b+c=0$, откуда и следует утверждение задачи.

M10.2 Решите уравнение $\sin^4 x+\sin^3 x\cos x+\sin x\cos^3 x+\cos^4 x=1$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x=\pi n+\dfrac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Заменим в правой части уравнения 1 на $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2$.
Приведя подобные слагаемые, получим уравнение $\sin^3 x\cos x-2\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos^3 x=0$. Отсюда $\sin x\cos x(\sin x-\cos x)^2=0$. Решениями полученного уравнения будут $x=\dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x=\pi n+\dfrac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

M10.3 Докажите, что если положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $(n \geq 2)$ образуют арифметическую прогрессию, то $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$.

Первое решение. Докажем утверждение задачи по индукции.

1) База индукции. При $n=2$ равенство верно: $\dfrac{1}{a_1a_2}=\dfrac{2-1}{a_1a_2}$.

2) Шаг индукции. Пусть для $n=k$ утверждение верно. Докажем его для $n=k+1$. Обозначим разность прогрессии d. Получаем $\dfrac{1}{a_1a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_{k-1}a_k}+\dfrac{1}{a_ka_{k+1}}=\dfrac{k-1}{a_1a_k}+\dfrac{1}{a_ka_{k+1}}=$ $=\dfrac{(k-1)a_{k+1}+a_1}{a_1a_ka_{k+1}}=\dfrac{(k-1)(a_1+kd)+a_1}{a_1a_ka_{k+1}}=\dfrac{k(a_1+kd-d)}{a_1a_ka_{k+1}}=\dfrac{ka_k}{a_1a_ka_{k+1}}=\dfrac{k}{a_1a_{k+1}}$, что и требовалось.

Второе решение. Обозначим разность прогрессии d.
Заметим, что $\dfrac{1}{a_ka_{k+1}}=\dfrac{1}{(a_1+(k-1)d)(a_1+kd)}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1+(k-1)d}-\dfrac{1}{a_1+kd}\right)=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$.
Тогда $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_n}\right)=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_n}\right)=$ $=\dfrac{a_n-a_1}{da_1a_n}=\dfrac{d(n-1)}{da_1a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$, что и требовалось.

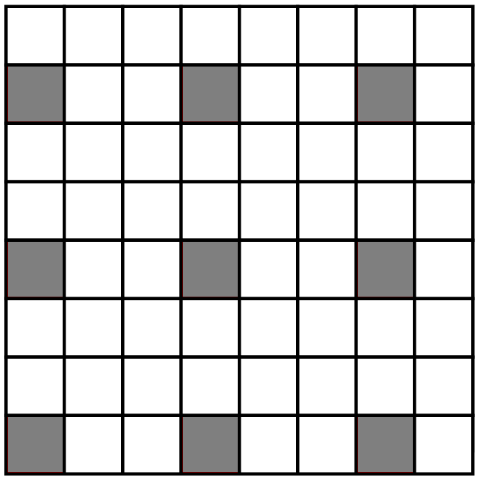
M10.4 Из концов диаметра AB проведены хорды AC и BD. Хорды пересекаются в точке M. Докажите, что величина $AC \cdot AM+BD \cdot BM$ не зависит от выбора хорд.

Решение. Заметим, что $\angle ADB=\angle ACB=90^\circ$ (AB — диаметр). Пусть N — проекция точки M на AB. Тогда прямоугольные треугольники AMN и ABC подобны. Также подобны треугольники BMN и BAD. Из подобия получаем, что $AB=AN+NB=\dfrac{AM \cdot AC}{AB}+\dfrac{BM \cdot BD}{AB}$. Отсюда $AC \cdot AM+BD \cdot BM=AB^2$, что и требовалось.

M10.5 Какое наименьшее количество фишек нужно поставить в клетки доски 8×8, чтобы для любой пустой клетки нашлась фишка, которая стоит в одной из соседних клеток? Клетки назовем соседними, если они имеют хотя бы одну общую вершину.

Ответ. 9.

Решение. Поставим 9 фишек в клетки, отмеченные на рисунке. Тогда для любой пустой клетки условие задачи выполняется.



Покажем, что требуется поставить не менее 9 фишек. Для этого рассмотрим 9 клеток, отмеченных на рисунке. Для каждой из таких клеток фишка должна стоять либо в ней, либо в одной из соседних. При этом для любых двух отмеченных клеток эти фишки будут различны. Значит, потребуется не менее 9 фишек.

М11.1 В арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, сумма первых $3n$ членов равна сумме следующих n членов. Найдите отношение суммы первых $2n$ членов к сумме следующих $2n$ членов.

Ответ. 0,2.

Решение. Обозначим первый член прогрессии a_1, а разность прогрессии d. Тогда, по условию, $3na_1 + \dfrac{3n(3n-1)}{2}d = na_1 + \dfrac{n(7n-1)}{2}d$, откуда $2a_n = (1-n)d$. Искомое отношение есть

$$\frac{2na_1 + \dfrac{2n(2n-1)}{2}d}{2na_1 + \dfrac{2n(6n-1)}{2}d} = \frac{2a_1 + (2n-1)d}{2a_1 + (6n-1)d} = \frac{(1-n)d + (2n-1)d}{(1-n)d + (6n-1)d} = \frac{nd}{5nd} = \frac{1}{5}.$$

Замечание. Первое соотношение можно получить по-другому, заметив, что сумма первых $4n$ членов равна удвоенной сумме первых $3n$ членов.

М11.2 Решите уравнение $\sin\left(\dfrac{\pi\cos x}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi\sin x}{2}\right)$.

Ответ. $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x = \pi m + \dfrac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Решение. Перепишем условие в виде $\sin\left(\dfrac{\pi\cos x}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi\cos x}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi\sin x}{2}\right)$. Заметим, что $\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi\cos x}{2} = 2\pi n \pm \dfrac{\pi\sin x}{2}$, откуда $\dfrac{1}{2} = 2n + \dfrac{\cos x \pm \sin x}{2}$. Так как $|\cos x \pm \sin x| < 2$, подходит только $n = 0$. Значит, $\cos x \pm \sin x = 1$. Так как $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x \mp \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, решениями уравнения будут $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x = \pi m + \dfrac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

М11.3 Существует ли такое число x, что значения выражений $x + \sqrt{2}$ и $x^3 + \sqrt{2}$ — рациональные числа?

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим, что требуемое x нашлось. Тогда $x + \sqrt{2} = a$ — рациональное число. Отсюда $x = a - \sqrt{2}$. Но тогда $x^3 + \sqrt{2} = (a - \sqrt{2})^3 + \sqrt{2} = a^3 - 3\sqrt{2}a^2 + 6a - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = a^3 + 6a - \sqrt{2}(3a^2 + 1)$. Это число является рациональным только при $3a^2 + 1 = 0$, противоречие.

М11.4 Докажите, что сумма квадратов всех ребер тетраэдра равна сумме квадратов длин всех трех отрезков, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, а M, N, K, L — середины ребер AD, DB, BC, CA соответственно. Так как MN и KL — средние линии треугольников ADB и ACB, то $MN \parallel KL$, $MN = KL = \dfrac{AB}{2}$. Поэтому $MNKL$ — параллелограмм (в нем также $LM \parallel NK$, $LM = NK = \dfrac{CD}{2}$). Известно, что сумма квадратов длин сторон параллелограмма равна сумме квадратов длин его диагоналей. Поэтому $MK^2 + NL^2 = MN^2 + NK^2 + KL^2 + LM^2 = \dfrac{AB^2 + CD^2}{2}$. Написав два аналогичных равенства для других пар отрезков, соединяющих середины противоположных ребер, и сложив все три равенства, получим требуемое.

М11.5 Какое наименьшее количество фишек нужно поставить в клетки доски 8×8, чтобы для любой пустой клетки нашлась фишка, которая стоит в одной диагонали с этой клеткой?

Ответ. 8.

Решение. Поставим 8 фишек в четвертую горизонталь доски. Тогда для любой пустой клетки условие задачи выполняется.

Покажем, что требуется поставить не менее 8 фишек. Для этого рассмотрим шахматную раскраску клеток доски. И посмотрим на «каемку», получаемую выбрасыванием из доски центрального квадрата 6×6. В этой каемке 14 черных и 14 белых клеток. Заметим, что одна фишка может стоять в одной диагонали (или занимать) не более 4 клеток одного цвета, расположенных в каемке. Поэтому на 14 белых клеток должно приходиться не менее $14/4$ фишек. То есть не менее 4 фишек должны стоять на белых клетках. Аналогично, не менее 4 фишек должно стоять на черных клетках. То есть потребуется не менее 8 фишек.

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук «Физтех-центр»

Сборник подготовили:

Гаврилов Ю. А., Останин П. А., Мукин Т. В., Диких Д. А., Зарубин И. Е., Кусков А. С., Кислицын И. А., Пенко А. В., Солоднев С. А., Шомполов И. Г., Трушин В. Б., Чивилёв В. И., Черкасова Е. К., Сидорова И. Е., Подлипский О. К., Агаханов Н. Х., Усков В. В., Юрьев Ю. В.

Под общей редакцией Шомполова И. Г.

Компьютерный набор Останин П. А.