Московский Физико-Технический Институт (национальный исследовательский университет)

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук «Физтех-центр»

59-я выездная физико-математическая олимпиада МФТИ

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Москва 2020

Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ
2019-2020 уч. года
Физика
Задания, решения

Время для решения заданий каждого класса — 2 часа.

Черновики не проверяются.

Каждая задача по физике оценивается целым числом баллов от 0 до 10.

Максимальное число баллов за олимпиаду 40.

Общие принципы выставления оценки по физике:

- правильное решение — 10 баллов;
- решение с недочетами — 7-9 баллов;
- решение с пропущенными важными частями — 3-5 баллов;

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

Ф8.1 Электричка идет с постоянной скоростью мимо платформы, не останавливаясь. Пассажир электрички заметил, что он проехал мимо платформы за $t_1 = 8$ с. Пассажир, стоящий на платформе, отметил, что поезд покинул платформу через $t_2 = 14$ с после въезда. Найти отношение длины платформы к длине поезда.

Решение. Пусть V — скорость поезда. Тогда для длины поезда l и длины платформы L из условия можем записать $L = Vt_1$, $L + l = Vt_2$, откуда $\dfrac{L}{l} = \dfrac{t_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{4}{3}$.

Ф8.2 Автомобиль едет из пункта A в пункт B. Если автомобиль будет ехать со скоростью $V_1 = 60$ км/ч, то он приедет в пункт B в 14-00. Если будет ехать со скоростью $V_2 = 90$ км/ч, то он приедет в пункт B в 12-00. С какой скоростью должен ехать автомобиль, чтобы приехать в пункт B в 13-00?

Решение. Пусть S — расстояние между пунктами. Тогда, подсчитывая это расстояние во всех трёх случаях, находим $S = Vt = V_1(t+1) = V_2(t-1)$. Отсюда $V = \dfrac{2V_1V_2}{V_1 + V_2} = 72$ км/ч.

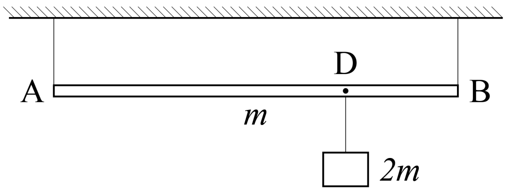
Ф8.3 Колонна автомобилей движется со скоростью $V_1 = 90$ км/ч. Расстояние между автомобилями (передними бамперами) равно $l_1 = 27$ м. Каким станет расстояние между автомобилями, если колонна въедет на участок дороги, где скорость $V_2 = 50$ км/ч?

Решение. В момент, когда первая машина въезжает на участок дороги, на котором скорость движения равна V_2, следующая за ней находится на расстоянии l_1. За время $t = \dfrac{l_1}{V_1}$, которое следующая машина тратит на то, чтобы доехать до участка дороги, скорость на котором равна V_2, первая машина проедет расстояние $l_2 = V_2 t = l_1 \dfrac{V_2}{V_1} = 15$ м, а это и есть искомое расстояние между автомобилями.

Ф8.4 Кусок дерева объемом $V = 20$ см^3 всплывает с глубины $H = 0{,}5$ м и приобретает у поверхности воды скорость $u = 1$ м/с. Найти работу (по модулю) силы сопротивления над куском дерева. Плотность дерева $\rho = 800$ кг/м^3.

Решение. Сумма работ силы Архимеда, силы тяжести и силы сопротивления равна изменению кинетической энергии: $\rho_{\text{в}} V g H - \rho V g H - A = \dfrac{1}{2}\rho V u^2$. Здесь $\rho_{\text{в}}$ — плотность воды. Отсюда $A = V\left[(\rho_{\text{в}} - \rho) g H - \dfrac{1}{2}\rho u^2\right] \approx 12$ мДж.

Ф8.5 Однородный стержень массой m подвешен горизонтально на двух вертикальных нитях (см. рис.). В точке D подвешен груз массой $2m$. Известно, что $AB = 4DB$. Найти силы натяжения нитей.



Решение. Пусть точка O находится в середине стержня AB. Запишем относительно неё правило моментов: $T_A \cdot AO = T_B \cdot OB - 2mg \cdot OD$. Из условия $2OD = AO$ получаем $T_A = T_B - mg$. А из условия равновесия для сил, действующих на стержень $T_A + T_B = 2mg + mg$. Подставляя выражение для T_A в условие равновесия, получаем ответ: $T_A = mg$, $T_B = 2mg$.

Ф8.6 В электрочайнике вода нагрелась от $t_1 = 15°C$ до $t_2 = 40°C$ за время $T_1 = 1$ мин. Затем из чайника отлили 1/3 объема воды и снова включили чайник. Через какое время T_2 после повторного включения вода закипит? Тепловыми потерями в окружающую среду пренебречь.

Решение. Пусть m — начальная масса воды, c — удельная теплоемкость воды, P — мощность чайника. Тогда из закона сохранения энергии $mc(t_2 - t_1) = PT_1$, $\frac{2}{3}mc(t_{100} - t_2) = PT_2$. Отсюда $T_2 = \frac{2}{3}\frac{t_{100} - t_2}{t_2 - t_1}T_1 = 1{,}6$ мин.

Ф9.1 Два стальных шарика брошены с балкона одновременно с одинаковыми скоростями: один вертикально вверх, другой — вертикально вниз. Они упали на поверхность Земли с интервалом $\tau = 1$ с. С какой скоростью были брошены шарики? Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Интервал τ равен удвоенному времени подъема брошенного вверх шарика до верхней точки. Поэтому $V_0 = g\dfrac{\tau}{2} \approx 5$ м/с.

Ф9.2 На горизонтальной поверхности доски находится брусок массой m. Доска массой $3m$ находится на горизонтальной поверхности стола. К бруску прикладывают горизонтальную силу. В результате доска движется по столу, а брусок по доске. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_1 = 0{,}5$, а между доской и столом $\mu_2 = 0{,}1$. С каким ускорением движется доска?

Решение. Запишем второй закон Ньютона для доски: $3ma = F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}1} = \mu_1 mg - \mu_2(m + 3m)g$ (здесь учтено, что $F_{\text{тр}} = \mu Mg$). Выражаем искомое ускорение: $a = g\dfrac{(\mu_1 - 4\mu_2)}{3} = 0{,}3$ м/с^2.

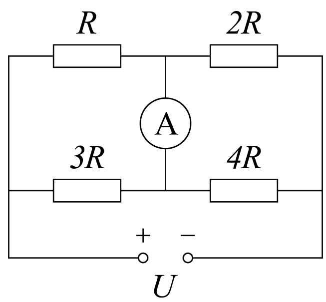
Ф9.3 В калориметр с водой при $0°C$ бросили кусок льда. Через некоторое время установилось равновесие при $0°C$, и масса льда увеличилась на 4,2%. Найти начальную температуру льда. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Удельная теплоемкость льда $c = 2100$ Дж/(кг·К).

Решение. Из уравнения теплового баланса можем записать $0{,}042m\lambda = mc(0 - t)$, откуда сразу же получаем $t = -0{,}042\dfrac{\lambda}{c} = -6{,}6°C$.

Ф9.4 Кусок проволоки сопротивлением $R = 25$ Ом согнули в кольцо, а концы спаяли. К точкам A и B кольца подсоединили провода. Сопротивление между точками A и B оказалось $r = 4$ Ом. В каком отношении точки A и B делят длину кольца?

Решение. Пусть сопротивления частей равны R_1 и R_2. Обозначим искомое их отношение $\dfrac{R_1}{R_2} = \alpha$. Тогда $R_1 + R_2 = R$, а $r = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, откуда $\dfrac{R}{r} = \dfrac{(\alpha + 1)^2}{\alpha}$, и поэтому $\alpha = 4$.

Ф9.5 Найти показание идеального амперметра в цепи, схема которой показана на рисунке.
$U = 12$ В, $R = 4$ Ом.



Решение. Если закоротить амперметр, то получим эквивалентную схему для нахождения токов через резисторы. $I_R = \dfrac{9}{25}\dfrac{U}{R}$, $I_{2R} = \dfrac{8}{25}\dfrac{U}{R}$.
Ток через амперметр $I = I_R - I_{2R} = \dfrac{1}{25}\dfrac{U}{R} = 0{,}12$ А.

Ф9.6 Скрепку двигают со скоростью $V = 10$ см/с к плоскому зеркалу перпендикулярно плоскости зеркала. Зеркало двигают в том же направлении со скоростью $V/5$. С какой скоростью V_1 (относительно комнаты) и в каком направлении движется изображение скрепки в зеркале?

Решение. $V_1 = V - 2 \cdot \dfrac{V}{5} = \dfrac{3}{5}V = 6$ см/с, в направлении, противоположном движению скрепки.

Ф10.1 В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде находится идеальный газ массой m с молярной массой μ. Газ отделен от атмосферы массивным поршнем, подвешенным на пружине жесткости k. При температуре T_1 поршень расположен на расстоянии h от дна сосуда, пружина сжата. До какой температуры надо нагреть газ, чтобы поршень оказался на высоте H от дна сосуда?

Решение. Пусть атмосферное давление равно P_0, масса поршня M, его площадь S. Тогда для первого состояния

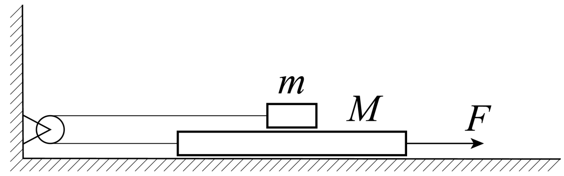
$$\left(P_0 + \frac{Mg}{S} + \frac{kx}{S}\right) hS = \frac{m}{\mu} RT_1,$$

а для второго состояния

$$\left(P_0 + \frac{Mg}{S} + \frac{k(x+H-h)}{S}\right) HS = \frac{m}{\mu} RT_2.$$

Здесь x — начальная деформация пружины. Отсюда $T_2 = T_1 \dfrac{H}{h} + \dfrac{\mu k H(H-h)}{mR}$.

Ф10.2 На гладком горизонтальном столе лежит брусок массы $M = 3$ кг, на котором находится другой брусок массы $m = 1$ кг. Оба бруска соединены легкой нитью, перекинутой через невесомый блок (см. рис.). Какую силу нужно приложить к нижнему бруску, чтобы он начал двигаться с постоянным ускорением $a = g/5$? Коэффициент трения между брусками $\mu = 0{,}3$.

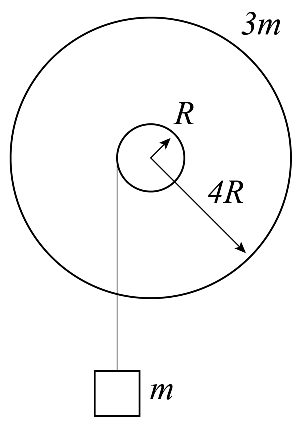


Решение. Из второго закона Ньютона для нижнего груза в проекции на горизонтальное направление находим $Ma = F - F_{\text{тр}} - T$. А из второго закона Ньютона для верхнего груза в проекции на вертикаль и горизонталь можем записать $N - mg = 0$ и $ma = T - F_{\text{тр}}$. Отсюда $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$ и $T = ma + \mu mg$. Подставляя силу натяжения нити и силу трения в уравнения для нижнего груза, получаем $Ma = F - \mu mg - ma - \mu mg$. Выражая искомую силу, получаем $F = (M+m)a + 2\mu mg = 16$ Н.

Ф10.3 Объем оболочки воздушного шара равен V, масса оболочки m. Шар наполнен горячим воздухом при атмосферном давлении P. Какую температуру должен иметь воздух внутри оболочки, чтобы шар начал подниматься? Температура воздуха вне оболочки равна T_0. Молярная масса воздуха μ.

Решение. Условие плавания тела: $(M_{\text{газ}} + m)g = \rho_0 gV \Leftrightarrow \rho_0 V = (\rho V + m) \Leftrightarrow (\rho_0 - \rho)V = m$, где ρ_0 — плотность воздуха снаружи, а ρ — плотность газа внутри.
Из уравнения состояния идеального газа для воздуха снаружи и внутри можем записать $P = \dfrac{\rho_0}{\mu} RT_0 = \dfrac{\rho}{\mu} RT$. Выражая плотности газов и подставляя в условие плавания, получим $m = \dfrac{\mu PV}{R}\left(\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T}\right)$. Выражая температуру, получим ответ $T = \left(\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{mR}{\mu PV}\right)^{-1} = \dfrac{T_0}{1 - \frac{mRT_0}{PV\mu}}$.

Ф10.4 На неподвижной оси без трения может вращаться тяжелое колесо, вся масса которого сосредоточена в ободе. С колесом связан легкий шкив радиуса R, на который намотана нить (см. рис.). На конце нити висит груз массы m. Радиус колеса равен $4R$, его масса $3m$. Какую скорость будет иметь груз после того, как он из состояния покоя опустится на расстояние H?



Решение. Угловая скорость вращения $\omega = \dfrac{V}{R}$. Из закона сохранения энергии можем записать $mgH = \dfrac{1}{2}mV^2 + \dfrac{3m(\omega \cdot 4R)^2}{2}$. Отсюда $V = \dfrac{\sqrt{2gH}}{7}$.

Ф10.5 Пуля массой m подлетает со скоростью V_0 к покоящемуся на гладком столе бруску массой $100m$ и, пробив его, вылетает со скоростью $V_0/10$. Определить, какая часть первоначальной кинетической энергии пули перешла во внутреннюю энергию пули и бруска. Брусок после вылета пули движется поступательно.

Решение. Пусть P — начальный импульс пули. Тогда импульс бруска $\dfrac{9}{10}P$. По ЗСЭ можем записать $\dfrac{P^2}{2m} = Q + \dfrac{(P/10)^2}{2m} + \dfrac{(9P/10)^2}{2 \cdot 100m}$. Нужно найти отношение $\alpha = Q/\left(\dfrac{P^2}{2m}\right)$ из уравнения $1 = \alpha + \dfrac{1}{100} + \dfrac{81}{10000}$. Окончательно получим $\alpha = \dfrac{9819}{10000} \approx 0{,}98$.

Ф10.6 В доме затопили печь, и температура воздуха поднялась с $t_1 = 15°C$ до $t_2 = 24°C$. Какая часть массы воздуха ушла при этом из дома?

Решение. Давление осталось атмосферным. Из уравнения состояния идеального газа находим массы $m_1 = \dfrac{PV\mu}{RT_1}$ и $m_2 = \dfrac{PV\mu}{RT_2}$. Находим тогда $\alpha = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1} = 1 - \dfrac{m_2}{m_1} = 1 - \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{1}{33}$.

Ф10.7 На горизонтальной поверхности доски находится брусок массой m. Доска массой $2m$ находится на горизонтальной поверхности стола. К бруску прикладывают горизонтальную силу. В результате доска движется по столу, а брусок по доске. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_1 = 0{,}5$, а между доской и столом $\mu_2 = 0{,}1$. С каким ускорением движется доска?

Решение. Запишем второй закон Ньютона для доски: $2ma = F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}1} = \mu_1 mg - \mu_2(m + 2m)g$ (здесь учтено, что $F_{\text{тр}} = \mu Mg$). Отсюда выражаем ускорение: $a = g\dfrac{(\mu_1 - 3\mu_2)}{2} = 1$ м/с^2.

Ф11.1 Идеальный газ массой m, находящийся при температуре T, охлаждается изохорически так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Определить совершенную газом работу. Молекулярная масса газа μ.

Решение. Обозначим состояние до изохорного нагревания 1, после изохорного нагревания и до изобарного расширения 2, а состояние после изобарного расширения 3. Тогда искомая работа A есть работа $A_{23} = P_{23}(V_3 - V_2)$, поскольку в изохорном процессе газ работы не совершает. По закону Гей-Люссака $\dfrac{V_2}{V_3} = \dfrac{T_2}{T_3}$, а по закону Шарля $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{T_1}{T_2} = n$, откуда $\dfrac{V_2}{V_3} = \dfrac{1}{n}$, и тогда $V_3 - V_2 = V_2(n-1)$. Из уравнения состояния идеального газа можем записать $V_2 = V_1 = \dfrac{mRT}{\mu P}$, откуда $A = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{m}{\mu}RT$.

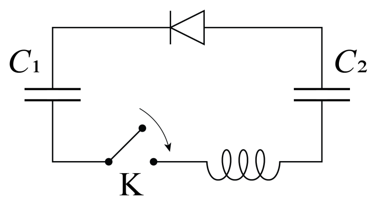
Ф11.2 Брусок массы m под действием упругой пружины совершает колебания с амплитудой A_0 на гладком горизонтальном столе. В тот момент, когда брусок проходит положение равновесия, на него сверху падает по вертикали и прилипает к нему кусок пластилина массы $m/3$. Найти новую амплитуду колебаний.

Решение. Пусть k — жесткость пружины, V_0 и V — скорости в положении равновесия до и после падения пластилина. Запишем ЗСЭ и ЗСИ: $\dfrac{1}{2}kA_0^2 = \dfrac{1}{2}mV_0^2$, $mV_0 = \left(m + \dfrac{m}{3}\right)V$, $\dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}\left(m + \dfrac{m}{3}\right)V^2$. Отсюда $A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A_0$.

Ф11.3 Шар массой m, движущийся со скоростью V, налетает на покоящийся шар и после упругого удара отскакивает от него под углом 90° к первоначальному направлению своего движения со скоростью $V/3$. Определить массу второго шара.

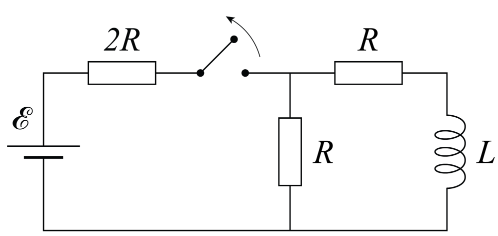
Решение. Пусть V_2 — скорость второго шара. По ЗСИ и ЗСЭ: $(m_2V_2)^2 = \left(m\dfrac{V}{3}\right)^2 + (mV)^2$, $\dfrac{1}{2}mV^2 = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{V}{3}\right)^2 + \dfrac{1}{2}m_2V_2^2$. Отсюда $m_2 = \dfrac{5}{4}m$.

Ф11.4 Конденсатор емкостью C_1 заряжен до разности потенциалов V_0. К нему через идеальные диод и катушку индуктивности подключают незаряженный конденсатор емкостью C_2 (см. рис.). До какого напряжения зарядится конденсатор емкостью C_1 после замыкания ключа K?



Решение. Из-за диода ток прекратится, и напряжения на конденсаторах станут V_1 и V_2. Сумма зарядов на нижних обкладках сохранится: $C_1V_1 + C_2V_2 = C_1V_0$.
По ЗСЭ: $\dfrac{1}{2}C_1V_0^2 = \dfrac{1}{2}C_1V_1^2 + \dfrac{1}{2}C_2V_2^2$. Отсюда $V_1 = \dfrac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}V_0$.

Ф11.5 В цепи, схема которой показана на рисунке, ключ замкнут, режим в цепи установился. Параметры цепи указаны на схеме. Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?



Решение. В установившемся режиме ток через катушку постоянен. В этом случае ток через источник равен $I_{\mathscr{E}} = \dfrac{\mathscr{E}}{2R + R/2} = \dfrac{2\mathscr{E}}{5R}$. Значит, ток через катушку в этот момент равен $I_L = \dfrac{\mathscr{E}}{5R}$. По закону сохранения энергии после размыкания ключа вся энергия, запасенная в катушке, выделится в виде тепла на резисторах, откуда находим искомую величину $Q = \dfrac{LI^2}{2} = \dfrac{L\mathscr{E}^2}{50R}$.

Ф11.6 Сосуд с влажным воздухом при температуре T_1 и относительной влажности 100% охлаждают до температуры T_2. Давления насыщенного пара воды при температурах T_1 и T_2 равны P_1 и P_2. Какая часть массы пара сконденсировалась? Объемом образовавшейся воды по сравнению с объемом сосуда пренебречь.

Решение. Из уравнения состояния идеального газа находим $m_1 = \dfrac{P_1 V\mu}{RT_1}$ и $m_2 = \dfrac{P_2 V\mu}{RT_2}$. Тогда искомое отношение есть $\alpha = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1} = 1 - \dfrac{m_2}{m_1} = 1 - \dfrac{P_2 T_1}{P_1 T_2}$.

Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ 2019-2020 уч. года
Математика
Задания, решения, критерии оценивания

Время для решения заданий каждого класса — 2 часа.

Черновики не проверяются.

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальное число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки по математике:

- правильное решение — 7 баллов;
- решение с недочетами — 5–6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — 4 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2–3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

M8.1-1 Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 1020304?

Ответ. 81020304.

Решение. Сумма $S = (n-4)+(n-3)+\ldots+(n+3)+(n+4) = 9n$ делится на 9. То есть число $S = \overline{a_1 \ldots a_k 1020304}$ делится на 9. Используя признак делимости на 9, получаем, что наименьшим подходящим числом будет 81020304.

M8.1-2 Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 8090102?

Ответ. 78090102.

Решение. Сумма $S = (n-4)+(n-3)+\ldots+(n+3)+(n+4) = 9n$ делится на 9. То есть число $S = \overline{a_1 \ldots a_k 8090102}$ делится на 9. Используя признак делимости на 9, получаем, что наименьшим подходящим числом будет 78090102.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 1 балл.

M8.2-1 Когда из семизначного числа A вычли сумму всех, кроме одной, его цифр, получили число 1234515. А какое число получится, если из A вычесть сумму всех его цифр, кроме первой?

Ответ. 1234513.

Решение. Сумма цифр числа A не превосходит 63. Поэтому число A имеет вид $\overline{12345ab}$. Получение числа 1234515 можно описать так: из числа A вычли сумму $S(A)$ всех его цифр, а потом к результату прибавили одну из цифр x исходного числа A. То есть $\overline{12345ab} - (1+2+3+4+5+a+b)+x = 1234515$. Отсюда $\overline{ab} - (15+a+b)+x = 15$, $10a+b-(15+a+b)+x = 15$, $9a+x = 30$. Поэтому не вычитали цифру $x = 3$. А если не вычитать 1 (первую цифру числа A) вместо 3, результат получится на 2 меньше, чем при вычитании 3.

M8.2-2 Когда из семизначного числа A вычли сумму всех, кроме одной, его цифр, получили число 5432115. А какое число получится, если из A вычесть сумму всех его цифр, кроме первой?

Ответ. 5432117.

Решение. Сумма цифр числа A не превосходит 63. Поэтому число A имеет вид $\overline{54321ab}$. Получение числа 5432115 можно описать так: из числа A вычли сумму $S(A)$ всех его цифр, а потом к результату прибавили одну из цифр x исходного числа A. То есть $\overline{54321ab} - (1+2+3+4+5+a+b)+x = 5432115$. Отсюда $\overline{ab} - (15+a+b)+x = 15$, $10a+b-(15+a+b)+x = 15$, $9a+x = 30$. Поэтому не вычитали цифру $x = 3$. А если не вычитать 5 (первую цифру числа A) вместо 3, результат получится на 2 больше, чем при вычитании 3.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 1 балл.
Верный ответ получен на примере — 3 балла.

M8.3-1 В классе 30 учеников. На контрольной по математике некоторые ученики класса получили 5, некоторые — 4, некоторые — 3, некоторые — 2. Сумма полученных оценок оказалась равной 130. А чему равнялась бы сумма полученных оценок, если бы все, получившие 5, получили бы 2, получившие 4 — получили бы 3, получившие 3 — получили бы 4, а получившие 2 — получили бы 5?

Ответ. 80.

Решение. Каждый из учеников класса за две контрольные (состоявшуюся и гипотетическую) получил бы сумму оценок, равную 7. Значит, для всех 30 учеников класса сумма оценок была бы равна 210. И сумма полученных оценок за вторую контрольную равнялась бы $210-130 = 80$.

M8.3-2 В классе 25 учеников. На контрольной по математике некоторые ученики класса получили 5, некоторые — 4, некоторые — 3, некоторые — 2. Сумма полученных оценок оказалась равной 100. А чему равнялась бы сумма полученных оценок, если бы все, получившие 5, получили бы 2, получившие 4 — получили бы 3, получившие 3 — получили бы 4, а получившие 2 — получили бы 5?

Ответ. 75.

Решение. Каждый из учеников класса за две контрольные (состоявшуюся и гипотетическую) получил бы сумму оценок, равную 7. Значит, для всех 25 учеников класса сумма оценок была бы равна 175. И сумма полученных оценок за вторую контрольную равнялась бы $175 - 100 = 75$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 1 балл.
Верный ответ получен на примере — 2 балла.

M8.4-1 В параллелограмме $ABCD$ сторона BC в 3 раза больше стороны AB. Биссектрисы углов $\angle DAB$ и $\angle ABC$ пересекают прямую CD в точках M и N соответственно. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $MN = 10$.

Ответ. 16.

Решение. Пусть биссектриса AM пересекает сторону BC в точке P, а биссектриса BN пересекает сторону AD в точке R. Тогда, в силу параллельности, $\angle BPA = \angle PAD = \angle PAB$ (AP — биссектриса). Значит, $BP = AB = x$. Но, по условию, $BC = 3AB$. Значит, $PC = 2x$. Заметим, что и треугольник PCM — равнобедренный: $PC = CM$, так как $\angle MPC = \angle BPA = \angle PAD$, и $\angle CMP = \angle PAB$. Значит, $CM = CP = 2x$. Аналогично $ND = 2x$, т. е. $MN = 5x$, $x = 2$. Значит, искомый периметр равен $(x + 3x) \cdot 2 = 8x = 16$.

M8.4-2 В параллелограмме $ABCD$ сторона BC в 4 раза больше стороны AB. Биссектрисы углов $\angle DAB$ и $\angle ABC$ пересекают прямую CD в точках M и N соответственно. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $MN = 21$.

Ответ. 30.

Решение. Пусть биссектриса AM пересекает сторону BC в точке P, а биссектриса BN пересекает сторону AD в точке R. Тогда, в силу параллельности, $\angle BPA = \angle PAD = \angle PAB$ (AP — биссектриса). Значит, $BP = AB = x$. Но, по условию, $BC = 4AB$. Значит, $PC = 3x$. Заметим, что и треугольник PCM — равнобедренный: $PC = CM$, так как $\angle MPC = \angle BPA = \angle PAD$, и $\angle CMP = \angle PAB$. Значит, $CM = PC = 3x$. Аналогично $ND = 3x$, т. е. $MN = 7x$, $x = 3$. Значит, искомый периметр равен $(x + 4x) \cdot 2 = 10x = 30$.

Комментарий. Доказано, что треугольник ABP — равнобедренный — 2 балла.
Доказано, что треугольник PCM (RND) — равнобедренный — 2 балла.

M8.5-1 В зале находятся лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый указал на одного из присутствующих и сказал: «Он — лжец». Оказалось, что про каждого из находящихся в зале кто-то такую фразу сказал. Могло ли в зале быть ровно 135 человек?

M8.5-2 В зале находятся лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый указал на одного из присутствующих и сказал: «Он — лжец». Оказалось, что про каждого из находящихся в зале кто-то такую фразу сказал. Могло ли в зале быть ровно 75 человек?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что в зале мог быть ровно $2k + 1$ человек. Так как каждый указал на одного из присутствующих, а на каждого из присутствующих кто-то указал, то на каждого указал ровно один из присутствующих. Заметим, что рыцарь мог указать только на лжеца, а лжец — только на рыцаря.

Посмотрим теперь на какого-нибудь рыцаря A. Он указал на какого-то лжеца. Тот указал на какого-то рыцаря. Продолжая эту «цепочку» мы получим, что рано или поздно какой-то лжец укажет на рыцаря A, так как на других людей в цепочке уже кто-то указывает. Поэтому все присутствующие разобьются на замкнутые цепочки (циклы) четной длины (возможно, длины 2). Но $2k + 1$ — нечетно. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.
Замечено, что на каждого указал ровно один из присутствующих — 2 балла.
Замечено, что рыцарь мог указать только на лжеца, а лжец — только на рыцаря — 1 балл.
Утверждается, что цепочка получилась одна (а не несколько) — не более 5 баллов за задачу.

M8.6 В школе были проведены соревнования по настольному теннису, в которых приняли участие более трех учащихся. При этом любые двое встречались между собой не более одного раза. Оказалось, что если школьник A выиграл у школьника B, а школьник B выиграл у школьника C, то C проиграл во всех встречах. Докажите, что всех участников соревнования можно разбить на три группы так, что никакие два участника из одной группы не встречались между собой.

Решение. Отнесем к первой группе K школьников, одержавших победы во всех встречах, ко второй группе M школьников, проигравших во всех встречах, к третьей группе L остальных школьников. Тогда школьники из группы K не могли встретиться между собой (они ни разу не проигрывали). Так же не встречались между собой школьники из группы M. Покажем, что не могли встречаться между собой и школьники из группы L. Пусть в ней оказались школьники B и C, встречавшиеся между собой, и, например, B выиграл у C. Поскольку B не вошел в группу K, то у него есть поражение от какого-то школьника A. Но тогда, согласно условию, у школьника C только поражения, и он не мог оказаться в группе L.

Комментарий. Игроки правильно распределены по группам, но не доказано, что разбиение удовлетворяет требованиям задачи — 3 балла.

М9.1-1 Докажите, что для любых натуральных чисел a и b число $4a^2+4ab+4a+2b+1$ является составным.

Решение. Заметим, что $4a^2+4ab+4a+2b+1 = (4a^2+4a+1)+2b+4ab = (2a+1)^2+2b(2a+1) = (2a+1)(2a+2b+1)$. Так как числа a и b натуральные, каждая из скобок больше 1. Поэтому число — составное.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что $4a^2+4ab+4a+2b+1 = (2a+b+1)^2-b^2$.

М9.1-2 Докажите, что для любых натуральных чисел a и b число $a^2+2ab+4a+4b+4$ является составным.

Решение. Заметим, что $a^2+2ab+4a+4b+4 = (a^2+4a+4)+4b+2ab = (a+2)^2+2b(a+2) = (a+2)(a+2b+2)$. Так как числа a и b натуральные, каждая из скобок больше 1. Поэтому число — составное.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что $a^2+2ab+4a+4b+4 = (a+b+2)^2-b^2$.

Комментарий. Разложение на множители получено, но не проверено, что оба множителя больше 1 — 5 баллов.

М9.2 Докажите, что сумму кубов пяти последовательных натуральных чисел можно разложить в произведение трех целых чисел, каждое из которых больше 1.

Решение. Раскрыв данную сумму $(n-2)^3+(n-1)^3+n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ по формулам сокращенного умножения, получим: $5n^3+30n = 5n(n^2+6)$. Каждый из трех получившихся множителей больше 1.

Комментарий. Разложение на множители получено, но не проверено, что оба множителя больше 1 — 5 баллов.

М9.3-1 Каждое из 10 последовательных натуральных чисел уменьшили на 1, и произведение этих десяти чисел уменьшилось в 3 раза. Найдите наименьшее из исходных чисел.

Ответ. 6.

Решение. Из условия следует равенство $3n(n+1)(n+2)\ldots(n+9) = (n+1)(n+2)\ldots(n+10)$, откуда $3n = n+10$.

М9.3-2 Каждое из 12 последовательных натуральных чисел уменьшили на 1, и произведение этих двенадцати чисел уменьшилось в 4 раза. Найдите наименьшее из исходных чисел.

Ответ. 5.

Решение. Из условия следует равенство $4n(n+1)(n+2)\ldots(n+11) = (n+1)(n+2)\ldots(n+12)$, откуда $4n = n+12$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.

М9.4-1 Задумали 17 целых чисел. Оказалось, что сумма задуманных чисел равна 125. После чего каждое число изменили: либо разделили его на 3, либо умножили его на 5. Могла ли сумма полученных 17 чисел равняться 175?

Ответ. Не могла.

Решение. Предположим, что сумма могла стать равной 175. Умножим каждое из полученных чисел на 3 (тогда сумма станет равной 525). Это будет равносильно тому, что некоторые задуманные числа остались без изменений, а некоторые умножились на 15. Если число x умножается на 15, то сумма изменяется на $14x$, то есть на число, кратное 14. Так как часть чисел не менялась, а часть умножалась на 15, то итоговая сумма изменилась на число, кратное 14. Однако изменение суммы, равное $525-125=400$, на 14 не делится. Противоречие.

M9.4-2 Задумали 25 целых чисел. Оказалось, что сумма задуманных чисел равна 150. После чего каждое число изменили: либо разделили его на 5, либо умножили его на 3. Могла ли сумма полученных 25 чисел равняться 200?

Ответ. Не могла.

Решение. Предположим, что сумма могла стать равной 200. Умножим каждое из полученных чисел на 5 (тогда сумма станет равной 1000). Это будет равносильно тому, что некоторые задуманные числа остались без изменений, а некоторые умножились на 15. Если число x умножается на 15, то сумма изменяется на $14x$, то есть на число, кратное 14. Так как часть чисел не менялась, а часть умножалась на 15, то итоговая сумма изменилась на число, кратное 14. Однако изменение суммы, равное $1000 - 150 = 850$, на 14 не делится. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.
В решении предполагается (или неявно используется), что после изменения все числа также целые — не более 2 баллов за задачу.

M9.5-1 Окружность, диаметром которой является боковая сторона AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = 90°$), касается боковой стороны CD в точке K. Диагонали трапеции пересекаются в точке L. Найдите длину отрезка KL, если длины оснований трапеции равны 3 и 5.

Ответ. $LK = \dfrac{15}{8} = 1{,}875$.

Решение. По свойству касательных к окружности $CK = CB = 3$, $DK = DA = 5$, откуда $CK : KD = 3 : 5$. С другой стороны, из подобия треугольников CLB и ALD, $CL : LA = BC : DA = 3 : 5$. Значит, $LK \parallel AD$. Далее из подобия треугольников DLK и DBC следует $LK : BC = DK : DC = 5 : (3 + 5)$. Отсюда $LK = \dfrac{5 \cdot 3}{3 + 5} = \dfrac{15}{8} = 1{,}875$.

M9.5-2 Окружность, диаметром которой является боковая сторона AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = 90°$), касается боковой стороны CD в точке K. Диагонали трапеции пересекаются в точке L. Найдите длину отрезка KL, если длины оснований трапеции равны 3 и 7.

Ответ. $LK = \dfrac{21}{10} = 2{,}1$.

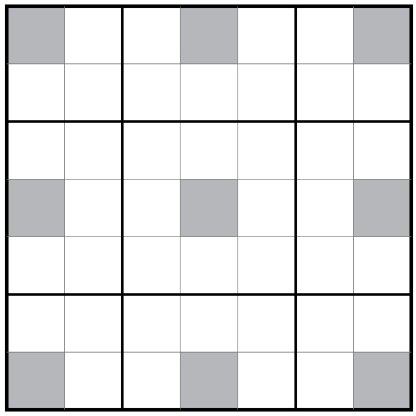
Решение. По свойству касательных к окружности $CK = CB = 3$, $DK = DA = 7$, откуда $CK : KD = 3 : 7$. С другой стороны, из подобия треугольников CLB и ALD, $CL : LA = BC : DA = 3 : 7$. Значит, $LK \parallel AD$. Далее из подобия треугольников DLK и DBC следует $LK : BC = DK : DC = 7 : (3 + 7)$. Отсюда $LK = \dfrac{7 \cdot 3}{3 + 7} = \dfrac{21}{10} = 2{,}1$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.
Доказано, что $LK \parallel AD$ — 3 балла.

M9.6 В клетках доски 7×7 стоят лжецы и рыцари (в каждой клетке — по одному человеку). Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый сказал: «В соседних со мной клетках нет рыцарей». Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Какое наименьшее число рыцарей могло стоять на доске?

Ответ. 9.

Решение. Из условия следует, что в одной из соседних клеток с любым лжецом должен стоять рыцарь, а все соседи рыцаря должны быть лжецами.
Рассмотрим 9 клеток, отмеченных на рисунке. Заметим, что либо в отмеченной клетке стоит рыцарь, либо (если в ней стоит лжец) хотя бы в одной соседней к ней стоит рыцарь. При этом ни у какой пары отмеченных клеток нет общих соседей. Поэтому рыцарей должно быть не меньше 9.



Если же рыцари будут стоять в отмеченных клетках, а в остальных будут стоять лжецы, то условие задачи будет выполнено.

Комментарий. Доказано, что рыцарей не меньше 9 — 4 балла.
Приведен пример расстановки с 9 рыцарями — 2 балла.

M10.1-1 Найдите отношение $\frac{b^2}{ac}$ если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 4 раза больше другого ($ac \neq 0$).

Ответ. $\frac{25}{4}$.

Решение. Пусть уравнение имеет корни x_1, x_2 ($x_1 = 4x_2$). Тогда из теоремы Виета получаем: $x_1+x_2 = 5x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = 4x_2^2 = \frac{c}{a}$. Отсюда $x_2 = -\frac{b}{5a}$, и $4x_2^2 = \frac{c}{a} = 4\left(-\frac{b}{5a}\right)^2 = \frac{4b^2}{25a^2}$, то есть $\frac{c}{a} = \frac{4b^2}{25a^2}$. Значит, $c = \frac{4b^2}{25a}$. Поэтому $\frac{b^2}{ac} = \frac{25}{4}$.

M10.1-2 Найдите отношение $\frac{b^2}{ac}$ если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 5 раз больше другого ($ac \neq 0$).

Ответ. $\frac{36}{5}$.

Решение. Пусть уравнение имеет корни x_1, x_2 ($x_1 = 5x_2$). Тогда из теоремы Виета получаем: $x_1+x_2 = 6x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = 5x^2 = \frac{c}{a}$. Отсюда $x_2 = -\frac{b}{6a}$, и $5x_2^2 = \frac{c}{a} = 5\left(-\frac{b}{6a}\right)^2 = \frac{5b^2}{36a^2}$, то есть $\frac{c}{a} = \frac{5b^2}{36a^2}$. Значит, $c = \frac{5b^2}{36a}$. Поэтому $\frac{b^2}{ac} = \frac{36}{5}$.
Комментарий. Верный ответ без обоснований — 1 балл.
Верный ответ получен рассмотрением примера — 1 балл.

M10.2-1 Докажите, что существует такое натуральное n, что число $n \cdot 1000 \cdot 1002 \cdot 1004 + 4$ является точным квадратом.

Решение. В качестве n можно взять число 1002. Действительно, введя обозначение $m = 1002$, получаем, что $n \cdot 1000 \cdot 1002 \cdot 1004 + 4 = nm(m^2-4)+4$. И если взять $n = m$, то получим $m^2(m^2-4)+4 = (m^2-2)^2$.

M10.2-2 Докажите, что существует такое натуральное n, что число $n \cdot 3000 \cdot 3002 \cdot 3004 + 4$ является точным квадратом.

Решение. В качестве n можно взять число 3002. Действительно, введя обозначение $m = 3002$, получаем, что $n \cdot 3000 \cdot 3002 \cdot 3004 + 4 = nm(m^2-4)+4$. И если взять $n = m$, то получим $m^2(m^2-4)+4 = (m^2-2)^2$.

Комментарий. Число n выбрано верно, но не обосновано, что оно подходит — 2 балла.

M10.3 Найдите все решения уравнения $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b} = \frac{1}{20}$ в натуральных числах.

Ответ. $a = 2$, $b = 5$ и $a = 4$, $b = 80$.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{20}$, поэтому a^2 может равняться только 1, 4, 9 или 16. Для $a^2 = 4$ получаем $b = 5$, для $a^2 = 16$ получаем $b = 80$, а других решений нет.

Комментарий. Получена оценка на возможные значения числа a — 2 балла.
Потеряно одно из решений — не более 4 баллов за задачу.
Угадан только один ответ без обоснований — 1 балл.
Угаданы оба ответа без обоснований — 2 балла.

M10.4 По кольцевой трассе одновременно из одной точки в одном направлении стартовали три велосипедиста. Первый из них проезжает всю трассу за 5 минут, второй — за 7 минут, третий — за 9 минут. Через какое наименьшее время все велосипедисты вновь окажутся в одной точке трассы? Скорости всех велосипедистов постоянны.

Ответ. 157,5 минут.

Решение. Пусть S — длина трассы, тогда скорость первого велосипедиста равна $S/5$, второго — $S/7$, третьего — $S/9$. Поэтому время T до встречи всех велосипедистов определяется равенствами $T\left(\dfrac{S}{5}-\dfrac{S}{7}\right)=nS$, $T\left(\dfrac{S}{7}-\dfrac{S}{9}\right)=mS$, где n, m — натуральные числа. Отсюда $\dfrac{n}{m}=\dfrac{9}{5}$. Наименьшее подходящее n равно 9. Значит, $T\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)=9$. Тогда минимальное время есть $T=9\cdot\dfrac{7\cdot5}{7-5}=157{,}5$ минут.

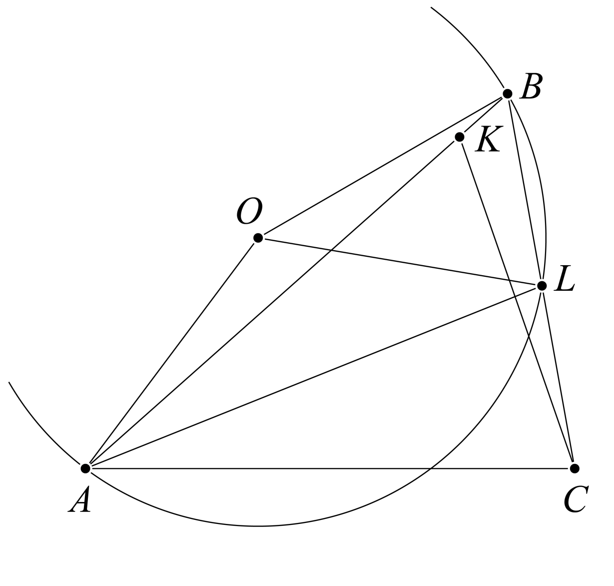
Комментарий. Верный ответ без обоснований — 2 балла.
Доказано, что одна из встреч произойдет через $157{,}5\cdot2=315$ минут — 0 баллов.

Замечание. Первая встреча велосипедистов произойдет не в стартовой точке.

M10.5 В треугольнике ABC, в котором $AB>AC$, проведена биссектриса AL. На стороне AB выбрана точка K так, что $AK=AC$. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ALB. Докажите, что углы KCB и ABO равны.

Первое решение. Вписанный угол BAL в два раза меньше центрального угла BOL, значит, $\angle BOL=2\angle BAL=\angle KAC$ (см. рис.). Значит, углы KAC и BOL — равные углы при вершинах равнобедренных треугольников KAC и BOL, поэтому $\angle AKC=\angle OBC$. Но угол AKC — внешний для треугольника KBC, поэтому $\angle AKC=\angle ABC+\angle KCB$, в частности $\angle OBC=\angle AKC>\angle ABC$, поэтому точка O лежит по другую сторону от AB, нежели C. С другой стороны, $\angle OBC=\angle ABC+\angle ABO$, откуда и следует утверждение задачи.

Второе решение. Обозначим углы треугольника $\angle BAC=2\alpha$, $\angle ABC=2\beta$, $\angle ACB=2\gamma$; по условию, $\beta<\gamma$. Тогда $\angle ALB=\angle ACL+\angle LAC=\alpha+2\gamma>90^\circ$, поэтому O лежит по другую сторону от AB, нежели L, и $\angle OBA=\angle OAB=(180^\circ-\angle AOB)/2=\angle ALB-90^\circ=(\alpha+2\gamma)-(\alpha+\beta+\gamma)=\gamma-\beta$. С другой стороны, в равнобедренном треугольнике AKC имеем $\angle ACK=\angle AKC=(180^\circ-\angle KAC)/2=90^\circ-\alpha=\beta+\gamma$, откуда $\angle KCB=\angle ACB-\angle ACK=2\gamma-(\beta+\gamma)=\gamma-\beta=\angle OBA$, что и требовалось.



Комментарий. Доказано, что $\angle BOL=\angle KAC$ — 2 балла.

Замечено, что треугольники KAC и BOL равнобедренные, и доказано, что $\angle AKC = \angle OBC$ — 1 балл.
Используется, но не доказано, что O лежит по другую сторону от AB, нежели C — снять 1 балл.

M10.6-1 Известно, что $2x + 3 > y^2 + z^2$. Докажите, что $x + y + z > -2{,}5$.

Решение. Добавим к обеим частям данного неравенства $2y + 2z$. Получим:

$$2(x + y + z) + 3 > y^2 + 2y + z^2 + 2z = (y + 1)^2 + (z + 1)^2 - 2.$$

Поэтому

$$2(x + y + z) > (y + 1)^2 + (z + 1)^2 - 5 \geq -5,$$

что и требовалось.

M10.6-2 Известно, что $4x + 2 > y^2 + z^2$. Докажите, что $x + y + z > -2{,}5$.

Решение. Добавим к обеим частям данного неравенства $4y + 4z$. Получим:

$$4(x + y + z) + 2 > y^2 + 4y + z^2 + 4z = (y + 2)^2 + (z + 2)^2 - 8.$$

Поэтому

$$4(x + y + z) > (y + 2)^2 + (z + 2)^2 - 10 \geq -10,$$

что и требовалось.

M11.1-1 На сторонах треугольника ABC отметили точки: 10 — на стороне AB, 11 — на стороне BC, 12 — на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника ABC не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

Ответ. 4951.

Решение. Три точки из 33 данных можно выбрать $C_{33}^3 = 5456$ способами. При этом треугольник образуется во всех случаях за исключением того, когда все три точки лежат на одной стороне треугольника.
Итак, не подходят $C_{12}^3+C_{11}^3+C_{10}^3 = 220+165+120 = 505$ способов. Значит, всего есть $5456-505 = 4951$ треугольник.

M11.1-2 На сторонах треугольника ABC отметили точки: 12 — на стороне AB, 9 — на стороне BC, 10 — на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника ABC не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

Ответ. 4071.

Решение. Три точки из 31 данной можно выбрать $C_{31}^3 = 4495$ способами. При этом треугольник образуется во всех случаях за исключением того, когда все три точки лежат на одной стороне треугольника.
Итак, не подходят $C_{12}^3+C_9^3+C_{10}^3 = 220+84+120 = 424$ способа. Значит, всего есть $4495-424 = 4071$ треугольник.

Комментарий. Неарифметическая ошибка при подсчете (учтены не все случаи, двойной подсчет, неверная комбинаторная формула) — не более 2 баллов за задачу.

M11.2 Найдите все решения уравнения $\dfrac{1}{a^3} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{72}$ в натуральных числах.

Ответ. $a = 2$, $b = 9$ и $a = 4$, $b = 576$.

Решение. Заметим, что $\dfrac{1}{a^3} > \dfrac{1}{72}$, поэтому a^3 может равняться только 1, 8, 27 или 64. Для $a^3 = 8$ получаем $b = 9$, для $a^3 = 64$ получаем $b = 576$, а других решений нет.

Комментарий. Получена оценка на возможные значения числа a — 2 балла.
Потеряно одно из решений — не более 4 баллов за задачу.
Угадан только один ответ без обоснований — 1 балл.
Угаданы оба ответа без обоснований — 2 балла.

M11.3 Числа a, b, c, d, где $0 < a < c$ таковы, что каждое из уравнений $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ имеет ровно по одному решению. Сколько решений может иметь уравнение $x^2 + (c-a)x + (d-b) = 0$?

Ответ. Нет решений.

Решение. Приравняв к нулю дискриминанты первых двух квадратных уравнений, получаем: $a^2 = 4b$, $c^2 = 4d$. Тогда дискриминант третьего уравнения есть $D = (c-a)^2 - 4(d-b) = c^2 - 2ac + a^2 - c^2 + a^2 = 2a(a-c)$ — отрицательное число

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 0 баллов.

M11.4-1 Числа x, y, z таковы, что $4x > y^2 + z^2$, $4y > x^2 + z^2$, $4z > y^2 + x^2$. Докажите, что $xyz < 8$.

Решение. Из условия следует, что числа x, y, z положительны. Заметим, что $y^2 + z^2 \geq 2yz$ (это неравенство равносильно $(y-z)^2 \geq 0$). Отсюда $2x > yz$. Аналогично, $2y > xz$, $2z >$

yx. Перемножив неравенства (обе части неравенств положительны), получим $8xyz > (xyz)^2$. Отсюда следует требуемое.

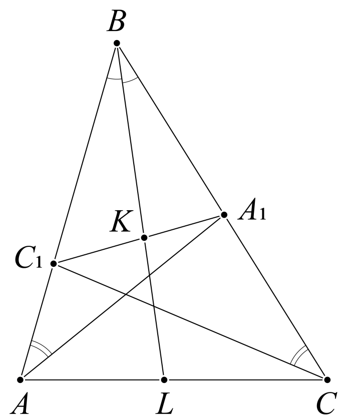
M11.4-2 Числа x, y, z таковы, что $6x > y^2 + z^2$, $6y > x^2 + z^2$, $6z > y^2 + x^2$. Докажите, что $xyz < 27$.

Решение. Из условия следует, что числа x, y, z положительны. Заметим, что $y^2 + z^2 \geq 2yz$ (это неравенство равносильно $(y - z)^2 \geq 0$). Отсюда $3x > yz$. Аналогично, $3y > xz$, $3z > yx$. Перемножив неравенства (обе части неравенств положительны), получим $27xyz > (xyz)^2$. Отсюда следует требуемое.

Комментарий. Замечено, что числа x, y, z положительны — 0 баллов.
В решении неявно предполагается, но не упоминается, что числа x, y, z положительны — снять 1 балл.

M11.5 На сторонах BC и BA треугольника ABC выбраны точки A_1 и C_1 соответственно так, что $\angle BAA_1 = \angle BCC_1$. Биссектриса BL треугольника ABC пересекает отрезок A_1C_1 в точке K. Докажите, что $A_1K \cdot CL = C_1K \cdot AL$.

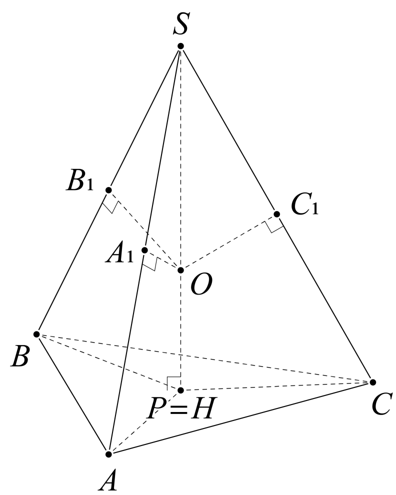
Решение. Треугольники AA_1B и CC_1B подобны по первому признаку ($\angle B$ — общий и $\angle BAA_1 = \angle BCC_1$). Поэтому $\dfrac{BA_1}{BC_1} = \dfrac{BA}{BC}$. По свойству биссектрисы угла треугольника $\dfrac{A_1K}{C_1K} = \dfrac{BA_1}{BC_1}$ и $\dfrac{CL}{AL} = \dfrac{CB}{AB}$. Значит, $\dfrac{A_1K}{C_1K} = \dfrac{BA_1}{BC_1} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AL}{CL}$. Отсюда и следует утверждение задачи.



Комментарий. Замечено подобие треугольников AA_1B и CC_1B — 2 балла.

M11.6 Сфера Ω касается каждого из боковых рёбер SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$, а также касается её основания в центре описанной около него окружности. Докажите, что центр сферы лежит на высоте пирамиды.

Решение. Пусть O — центр сферы, P — центр описанной около основания окружности, A_1, B_1, C_1 — точки касания сферы с рёбрами SA, SB, SC соответственно (см. рис.). По свойству касательных, проведенных к сфере из одной точки, имеем: $SA_1 = SB_1 = SC_1 = a$, $AA_1 = AP$, $BB_1 = BP$, $CC_1 = CP$. Но по условию $PA = PB = PC$, где R — радиус описанной около основания окружности. Значит, $SA = SB = SC = a + R$.
Пусть SH — высота пирамиды. Тогда из равных прямоугольных треугольников SAH, SBH, SCH (SH — общий катет) следует, что $HA = HB = HC$. Но это означает, что точка H — центр описанной около основания окружности, то есть H совпадает с точкой P, откуда $SP \perp ABC$. Наконец, по свойству радиуса, проведенного в точку касания, $OP \perp ABC$. Значит, прямые SP и OP совпадают, откуда и следует утверждение задачи.



Комментарий. Доказано равенство боковых ребер — 2 балла.

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук «Физтех-Центр»

Сборник подготовили:

Шомполов И. Г., Трушин В. Б., Подлипский О. К., Агаханов Н. Х., Усков В. В., Чивилёв В. И., Юрьев Ю. В., Останин П. А., Светличный А. О., Мукин Т. В., Диких Д. А., Бурнашов Д. А., Унтилов Я. О., Поминов С. С., Сущенко А. А., Грянченко В. А., Ильина А. А.

Под общей редакцией Шомполова И. Г.

Авторы задач и составители: Чивилёв В. И., Юрьев Ю. В., Агаханов Н. Х., Подлипский О. К.

Компьютерный набор Останин П. А.