Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ

2020-2021 уч. года

Математика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса – 2 часа.

Черновики не проверяются.

В вариант включаются 4 задачи в соответствии с вариантами замены.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимально число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки:

– правильное решение – 7 баллов;

– решение с недочетами – 5 – 6 баллов;

– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи – 4 балла;

– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения – 1 балл;

– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи – 2 – 3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Обязательно следует сделать объявление, что ответы в каждой задаче требуют объяснения.

8 класс

8.1-1. При каких значениях параметра *a* прямые $y = 2x - 1$, $y = x + a + 3$ и $ay = -x - 4$ проходят через одну точку?

Ответ. –2.

Решение. Приравняв первые два уравнения, получим $x + a + 3 = 2x - 1$, откуда $x = a + 4$. Тогда из первого уравнения получим $y = 2a + 7$. Подставим в третье уравнение: $a(2a + 7) = -(a + 4) - 4$, откуда $2a^2 + 8a + 8 = 0 \Leftrightarrow 2(a + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

При данном значении параметра прямые пересекаются в точке (2; 3).

Комментарий. Ответ угадан – 1 балл.

8.1-2. При каких значениях параметра *a* прямые $y = 2x + 1$, $y = x - a + 6$ и $ay = x + 13$ проходят через одну точку?

Ответ. 3.

Решение. Приравняв первые два уравнения, получим $x - a + 6 = 2x + 1$, откуда $x = 5 - a$. Тогда из первого уравнения получим $y = 11 - 2a$. Подставим в третье уравнение: $a(11 - 2a) = (5 - a) + 13$, откуда $2a^2 - 12a + 18 = 0 \Leftrightarrow 3(a - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 3$.

При данном значении параметра прямые пересекаются в точке (2; 5).

Комментарий. Ответ угадан – 1 балл.

8.2-1. Существует ли натуральное число *N* такое, что если к нему прибавить

его наибольший делитель, отличный от *N*, то получится число 2020! ($k! = 1 \cdot 2 \cdot \boxed{?} \cdot k$)?

Ответ. Существует.

Решение. Заметим, что 2020! делится на 3. Пусть $2020! = 3M$. Тогда подойдет число $N = 2M$. Его наибольший делитель, отличный от *N*, равен *M*. И $N + M = 2M + M = 3M = 2020!$

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

8.2-2. Существует ли натуральное число *N* такое, что если к нему прибавить его наибольший делитель, отличный от N, то получится число 1000! ($k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$)?

Ответ. Существует.

Решение. Заметим, что 1000! делится на 3. Пусть $1000! = 3M$. Тогда подойдет число $N = 2M$. Его наибольший делитель, отличный от N, равен M. И $N + M = 2M + M = 3M = 1000!$

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

8.3. Существует ли натуральное число N такое, что суммы цифр у чисел N и $N+1$ – точные квадраты, большие 100?

Ответ. Существует.

Решение. Рассмотрим число $N = 11\ldots119999$ (в начале числа 288 единиц). Тогда $N + 1 = 11\ldots120000$. При этом сумма цифр числа N равна $288 + 36 = 324 = 18^2$, а у числа $N+1$ равна $289 = 17^2$

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

8.4-1. Найдите наименьшее количество одинаковых кругов радиуса 6,5, которыми можно покрыть прямоугольный треугольник с катетами 10 и 24.

Ответ. 3.

Решение. Гипотенуза треугольника будет равна 26.

Заметим, что двух кругов не хватит. Действительно, чтобы покрыть гипотенузу, необходимо разместить два круга так, чтобы каждый из диаметров (длины 13) покрывал половину гипотенузы. Но тогда вершина прямого угла будет непокрыта.

Покажем, как покрыть треугольник тремя кругами. Так как гипотенуза треугольника равна 26, то медиана, проведенная к гипотенузе, равна 13. Опустим из середины гипотенузы перпендикуляры на катеты. Они разрежут исходный треугольник на два прямоугольных треугольника с гипотенузами длины 13 и прямоугольник с диагональю длины 13. Каждый из этих трех многоугольников покрывается кругом с диаметром 13.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Доказана только оценка – 3 балла.

Приведен только пример – 3 балла.

8.4-2. Найдите наименьшее количество одинаковых кругов радиуса 8,5, которыми можно покрыть прямоугольный треугольник с катетами 16 и 30.

Ответ. 3.

Решение. Гипотенуза треугольника будет равна 34.

Заметим, что двух кругов не хватит. Действительно, чтобы покрыть гипотенузу, необходимо разместить два круга так, чтобы каждый из диаметров (длины 17) покрывал половину гипотенузы. Но тогда вершина прямого угла будет непокрыта.

Покажем, как покрыть треугольник тремя кругами. Так как гипотенуза треугольника равна 34, то медиана, проведенная к гипотенузе, равна 17. Опустим из середины гипотенузы перпендикуляры на катеты. Они разрежут исходный треугольник на два прямоугольных треугольника с гипотенузами длины 17 и прямоугольник с диагональю длины 17. Каждый из этих трех многоугольников покрывается кругом с диаметром 17.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Доказана только оценка – 3 балла.

Приведен только пример – 3 балла.

9 класс

9.1-1. Найдите все значения *y*, для которых существуют положительные числа a, b, c такие, что $a+b+c=4-y^2$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1+2y$.

Ответ. 1.

Решение. Сложив равенства, получим $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=5-y^2+2y$.

Заметим, что $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$ так как $t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$, причем неравенство обращается в равенство только при $a=b=c=1$.

Также заметим, что $5-y^2+2y=6-(y-1)^2\leq 6$, причем неравенство обращается в равенство только при $y=1$.

Значит, единственный возможный случай, это $y=1$ (при $a=b=c=1$).

При этом оба равенства будут верны.

Комментарий. Ответ угадан – 1 балл.

Не сделана проверка – не более 5 баллов за задачу.

9.1-2. Найдите все значения *y*, для которых существуют положительные числа a, b, c такие, что $a+b+c=2-y$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3-y^2-y$.

Ответ. –1.

Решение. Сложив равенства, получим $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=5-y^2-2y$.

Заметим, что $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$ так как $t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$, причем неравенство обращается в равенство только при $a=b=c=1$.

Также заметим, что $5-y^2-2y=6-(y+1)^2\leq 6$, причем неравенство обращается в равенство только при $y=-1$.

Значит, единственный возможный случай, это $y=-1$ (при $a=b=c=1$).

При этом оба равенства будут верны.

Комментарий. Ответ угадан – 1 балл.

Не сделана проверка – не более 5 баллов за задачу.

9.2-1. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)=x^2+ax+b$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из коэффициента a любой из этих корней, а коэффициент b удвоить, то полученный трехчлен будет иметь хотя бы один корень.

Решение. Пусть x_1, x_2 – корни трехчлена $f(x)$. Тогда получившийся трехчлен имеет вид $f_1(x)=x^2-(2x_1+x_2)x+2x_1x_2$. Его дискриминант $D=(2x_1+x_2)^2-4\cdot 2x_1x_2=(2x_1-x_2)^2\ge 0$, что и требовалось.

Комментарий. Получено неравенство $D>0$ вместо $D\ge 0$ – снять 1 балл.

9.2-2. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)=x^2+ax+b$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из коэффициента a любой из этих корней, умноженный на 2, а коэффициент b утроить, то полученный трехчлен будет иметь хотя бы один корень.

Решение. Пусть x_1, x_2 – корни трехчлена $f(x)$. Тогда получившийся трехчлен имеет вид $f_1(x)=x^2-(3x_1+x_2)x+3x_1x_2$. Его дискриминант $D=(3x_1+x_2)^2-4\cdot 3x_1x_2=(3x_1-x_2)^2\ge 0$, что и требовалось.

Комментарий. Получено неравенство $D>0$ вместо $D\ge 0$ – снять 1 балл.

9.3. Ненулевые числа *a*, *b* и *c* таковы, что выполняются равенства $a^2(b+c-a)=b^2(a+c-b)=c^2(b+a-c)$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\dfrac{2b+3c}{a}$?

Ответ. 5.

Решение. Приравняв первое и второе выражение, после преобразования получим: $(a-b)(a^2+b^2-ac-bc)=0$. Аналогично получим равенства $(b-c)(b^2+c^2-ab-ac)=0$ и $(a-c)(a^2+c^2-ab-cb)=0$.

Докажем, что $a=b=c$.

Предположим, что $a=b\ne c$. Тогда из второго равенства получаем: $0=b^2+c^2-ab-ac=b^2+c^2-b^2-bc=c^2-bc$, откуда $b=c$ (так как $c\ne 0$). Противоречие.

Значит, либо числа попарно различны, либо они все равны между собой.

Предположим, что числа попарно различны, тогда $a^2+b^2-ac-bc=0$, $b^2+c^2-ab-ac=0$ и $a^2+c^2-ab-cb=0$. Сложив эти равенства, получим $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, откуда $a=b=c$. Противоречие.

Значит, единственный возможный случай, это $a=b=c$. Но тогда $\frac{2b+3c}{a}=\frac{2a+3a}{a}=5$.

Комментарий. Верный ответ получен рассмотрением частного случая – 1 балл.

Утверждается, что $a=b=c$, но это утверждение не доказано – баллы не добавляются.

9.4-1. Известно, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений. Верно ли, что квадратное уравнение $(2a+c)x^2+3bx+(a+2c)=0$ также не имеет решений?

Ответ. Верно.

Решение. Заметим, что если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений, то и квадратное уравнение $cx^2+bx+a=0$ не имеет решений, так как у этих уравнений одинаковые дискриминанты. При этом, если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений, то знаки коэффициентов *a* и *c* будут одинаковы (в противном случае дискриминант будет неотрицательным). Это означает, что графики квадратичных функций $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=cx^2+bx+a$ либо одновременно лежат выше оси *Ox*, либо одновременно ниже оси *Ox*. Но тогда и график суммы $h(x)=2f(x)+g(x)=(2a+c)x^2+3bx+(a+2c)$ также не пересекает ось *Ox*.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

9.4-2. Известно, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений. Верно ли, что квадратное уравнение $(a+3c)x^2+4bx+(3a+c)=0$ также не имеет решений?

Ответ. Верно.

Решение. Заметим, что если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений, то и квадратное уравнение $cx^2+bx+a=0$ не имеет решений, так как у этих уравнений одинаковые дискриминанты. При этом, если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет решений, то знаки коэффициентов *a* и *c* будут одинаковы (в противном случае дискриминант будет неотрицательным). Это означает, что графики квадратичных функций $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=cx^2+bx+a$ либо одновременно лежат выше оси *Ox*, либо одновременно ниже оси *Ox*. Но тогда и график суммы $h(x) = f(x) + 3g(x) = (a+3c)x^2 + 4bx + (3a+c)$ также не пересекает ось *Ox*.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

9.5. Существует ли тринадцать последовательных натуральных чисел таких, что их сумма является 2021 степенью натурального числа?

Ответ. Существуют.

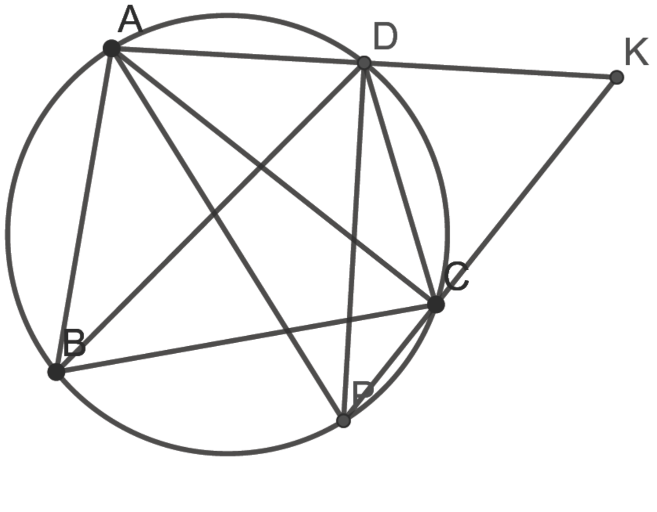
Решение. Обозначим 13 последовательных чисел $N-6, N-5, \boxed{?}, N+5, N+6$. Тогда их сумма равна $13N$. Если $N = 13^{2020}$, то сумма будет равна $13N = 13 \cdot 13^{2020} = 13^{2021}$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

9.6-1. На данной окружности ω выбраны точки *A*, *B* и *C* так, что угол *ABC* равен 70°. Пусть *D* – точка пересечения биссектрисы угла *ABC* с окружностью ω, а точка *K* симметрична точке *A* относительно точки *D*. Прямая *KC* вторично пересекает окружность в точке *P* ($P \neq C$, точка *C* лежит на отрезке *KP*). Найдите угол *ADP*.

Ответ. 90°.

Решение. Докажем, что *PD* – перпендикуляр к *AK*. $AD = DK$, значит, нам нужно доказать, что $\alpha = \angle APD = \beta = \angle KPD$. Но $\alpha = \angle APD = \angle ABD$ (вписанные, опираются на дугу *AD*), $\beta = \angle CPD = \angle CBD$ (вписанные, опираются на дугу *CD*). Наконец, $\angle ABD = \angle CBD$, так как *BD* – биссектриса $\angle ABC$. Утверждение доказано.

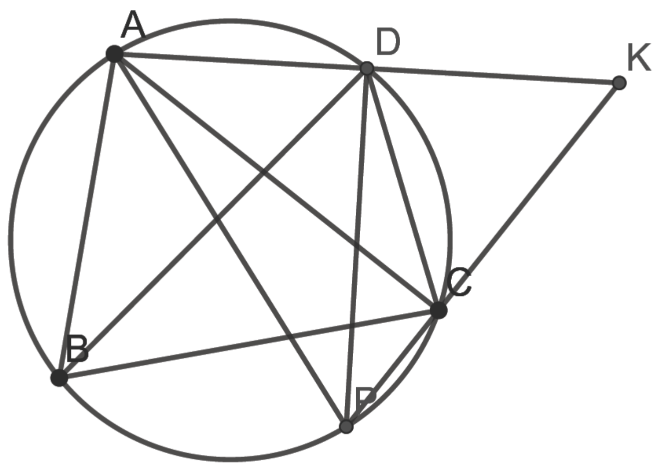


Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

9.6-2. На данной окружности ω выбраны точки *A*, *B* и *C* так, что угол *ABC* равен 65°. Пусть *D* – точка пересечения биссектрисы угла *ABC* с окружностью ω, а точка *K* симметрична точке *A* относительно точки *D*. Прямая *KC* вторично пересекает окружность в точке *P* ($P \neq C$, точка *C* лежит на отрезке *KP*). Найдите угол *ADP*.

Ответ. 90°.

Решение. Докажем, что *PD* – перпендикуляр к *AK*. $AD = DK$, значит, нам нужно доказать, что $\alpha = \angle APD = \beta = \angle KPD$. Но $\alpha = \angle APD = \angle ABD$ (вписанные, опираются на дугу *AD*), $\beta = \angle CPD = \angle CBD$ (вписанные, опираются на дугу *CD*). Наконец, $\angle ABD = \angle CBD$, так как *BD* – биссектриса $\angle ABC$. Утверждение доказано.



Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

10 класс

10.1-1. Найдите все значения *y*, для которых существуют положительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 такие, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 - \sqrt{y+1}$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 4 - \sqrt{y}$.

Ответ. 0.

Решение. Сложив равенства, получим $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 9 - \sqrt{y} - \sqrt{y+1}$.

Заметим, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \ge 8$ так как $x_i + \frac{1}{x_i} \ge 2\sqrt{x_i \cdot \frac{1}{x_i}} = 2$, причем неравенство обращается в равенство только при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

А так как $y \ge 0$, то выполняется $9 - \sqrt{y} - \sqrt{y+1} \le 9 - 0 - 1 = 8$, причем неравенство обращается в равенство только при $y = 0$.

Значит, единственный возможный случай, это $y = 0$ (при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$).

При этом оба равенства будут верны.

Комментарий. Ответ угадан – 1 балл.

Не сделана проверка – не более 5 баллов за задачу.

10.1-2. Найдите все значения *y*, для которых существуют положительные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 такие, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 - \sqrt{y+4}$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = 5 - \sqrt{y}$.

Ответ. 0.

Решение. Сложив равенства, получим $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = 12 - \sqrt{y} - \sqrt{y+4}$.

Заметим, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} \ge 10$ так как $x_i + \frac{1}{x_i} \ge 2\sqrt{x_i \cdot \frac{1}{x_i}} = 2$, причем неравенство обращается в равенство только при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$.

А так как $y \ge 0$, то выполняется $12 - \sqrt{y} - \sqrt{y+4} \le 12 - 0 - 2 = 10$, причем неравенство обращается в равенство только при $y = 0$.

Значит, единственный возможный случай, это $y = 0$ (при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$). При этом оба равенства будут верны.

Комментарий. Ответ угадан – 1 балл.

Не сделана проверка – не более 5 баллов за задачу.

10.2. Есть 90 карточек – 10 с цифрой 1, 10 с цифрой 2, …, 10 с цифрой 9. Из всех этих карточек составили два числа, одно из которых в три раза больше другого. Докажите, что одно из этих чисел можно разложить на четыре не обязательно различных натуральных множителя, больших единицы.

Решение. Обозначим эти числа *A* и $B = 3A$. Тогда сумма цифр числа *B* делится на 3. Но сумма цифр на всех карточках делится на 9 (а, значит, и на 3), поэтому сумма цифр числа *A* делится на 3. Значит, число *A* делится на 3. Но тогда число $B = 3A$ делится на 9 и сумма его цифр делится на 9. А так как сумма цифр на всех карточках делится на 9, то тогда и сумма цифр числа A делится на 9. Значит, число *A* делится на 9. Поэтому число $B = 3A$ делится на 27. Итак, число *B* делится на 27 и больше 27, поэтому оно раскладывается на 4 множителя 3, 3, 3 и $\frac{B}{27} > 1$.

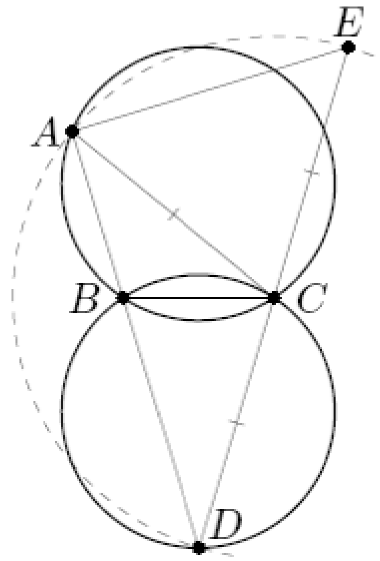
Комментарий. Доказано, что большее из чисел делится на 9 – 3 балла.

10.3-1. Пусть B и C – точки пересечения двух окружностей равных радиусов. На первой окружности выбрана точка A. Луч AB пересекает вторую окружность в точке D ($D \neq B$). На луче DC выбрана точка E так, что $DC = CE$. Найдите угол *CEA*, если угол *CDB* равен $50°$.

Ответ. $40°$.

Решение. Докажем сначала, что угол DAE – прямой. Соединим точки A и C. Общая хорда BC двух равных окружностей стягивает равные дуги этих окружностей, поэтому опирающиеся на эти дуги вписанные углы BAC и BDC равны. Но тогда треугольник ACD – равнобедренный, откуда $AC = CD = CE$ (последнее – в силу условия задачи). Итак, точка C является центром окружности, описанной около треугольника DAE. Отрезок DE является диаметром этой окружности, откуда следует, что угол DAE – прямой.

Тогда $\angle CEA = \angle DEA = 90° - \angle ADE = 90° - \angle CDB = 40°$.



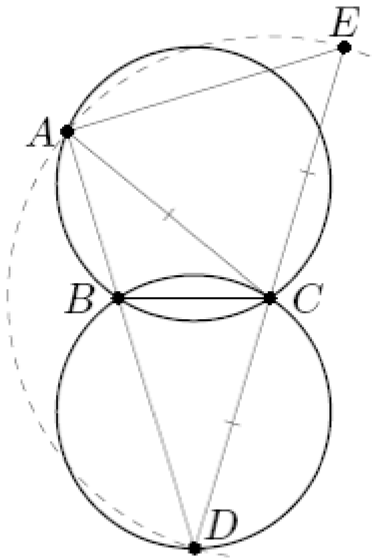
Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

10.3-2. Пусть B и C – точки пересечения двух окружностей равных радиусов. На первой окружности выбрана точка A. Луч AB пересекает вторую окружность в точке D ($D \neq B$). На луче DC выбрана точка E так, что $DC = CE$. Найдите угол *CEA*, если угол *CDB* равен $40°$.

Ответ. $50°$.

Решение. Докажем сначала, что угол DAE – прямой. Соединим точки A и C. Общая хорда BC двух равных окружностей стягивает равные дуги этих окружностей, поэтому опирающиеся на эти дуги вписанные углы BAC и BDC равны. Но тогда треугольник ACD – равнобедренный, откуда $AC = CD = CE$ (последнее – в силу условия задачи). Итак, точка C является центром окружности, описанной около треугольника DAE. Отрезок DE является диаметром этой окружности, откуда следует, что угол DAE – прямой.

Тогда $\angle CEA = \angle DEA = 90° - \angle ADE = 90° - \angle CDB = 50°$.



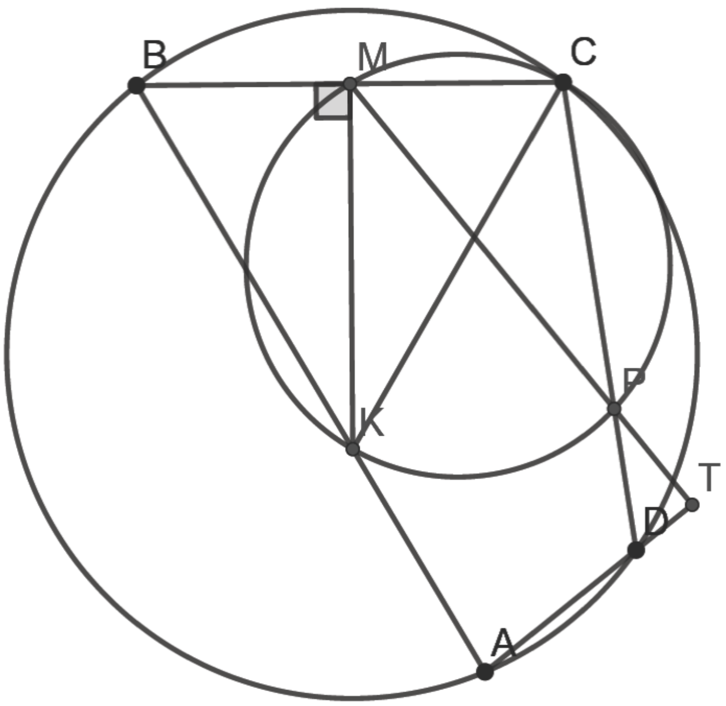
Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

10.4. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Перпендикуляр к стороне *BC*, проведенный через ее середину – точку *M*, пересекает сторону *AB* в точке *K*. Окружность с диаметром *KC* пересекает отрезок *CD* в точке *P* ($P \neq C$). Найдите угол между прямыми *MP* и *AD*.

Ответ. 90°.

Решение. Докажем, что прямые *MP* и *AD* перпендикулярны. Пусть ω – окружность, построенная на *KC* как на диаметре, тогда точка *M* лежит на ω, так как угол *CMK* – прямой. Значит, $\angle CPM = \angle CKM = \alpha$ (они опираются на дугу *CM* окружности ω). Пусть *T* – точка пересечения прямых *AD* и *MP*. Будем считать, что точка *D* лежит на отрезке *AT*. Другой случай разбирается аналогично. Тогда $\angle TPD = \alpha$ (углы *TPD* и *CPM* – вертикальные). Значит, для того, чтобы доказать, что прямые *AD* и *MP* перпендикулярны, нам нужно доказать, что $\angle PDT + \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Но если $\angle PDT = \beta$, то $\angle PDA = \pi - \beta \Rightarrow \angle ABC = \beta$, так как четырехугольник *ABCD* – вписанный. Наконец, $BK = CK$, так как *MK* – серединный перпендикуляр к *BC*. Следовательно, $\angle KCM = \angle KBM = \beta$. А из прямоугольного треугольника *KMC* получаем $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Утверждение доказано.



Комментарий. Разобран только один случай расположения точки D – баллы не снимаются.

Доказано, что точка M лежит на ω –1 балл.

10.5. В шахматном турнире участвовали десятиклассники и девятиклассники. Десятиклассников было в 9 раз больше, и они набрали в 4 раза больше очков, чем девятиклассники. Ученик какого класса стал победителем турнира, и сколько очков он набрал? В шахматах за победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очков, за поражение – 0 очков.

Ответ. 9-классник, 9 очков.

Решение. Пусть в турнире участвовало x 9-классников и $9x$ 10-классников. Оценим, какое наибольшее количество очков могли набрать 9-классники и какое при этом наименьшее количество очков могли набрать 10-классники. Такое произойдет, если все 9-классники выиграли в партиях с 10-классниками. Тогда 9-классники наберут суммарно в играх между собой $\frac{x(x-1)}{2}$ очков и $x \cdot 9x$ в играх с 10-классниками. А 10-классники наберут суммарно $\frac{9x(9x-1)}{2}$.

Из условия следует, что $\left(9x^2+\frac{x(x-1)}{2}\right)\cdot 4 \geq \frac{9x(9x-1)}{2} \Leftrightarrow x \leq 1$.

Поэтому единственная возможная ситуация, это когда в турнире участвовал один 9-классник и он выиграл все партии у 10-классников, то есть набрал 9 очков.

Комментарий. Только пример одного турнира – 1 балл.

10.6-1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень. Может ли произведение $P(0)\cdot P(1)$ оканчиваться на 4321?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть x_0 – целый корень $P(x)$, то есть $P(x_0)=0$. Так как у многочлена $P(x)$ целые коэффициенты, то $P(x_0+2k)$ – четное число (это следует из того, что $(x_0+2k)^m-x_0^m$ делится $(x_0+2k)-x_0=2k$). Но тогда по крайней мере одно из чисел $P(0), P(1)$ является четным, а, значит, произведение $P(0)\cdot P(1)$ – четно и не может оканчиваться на 4321.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

10.6-2. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень. Может ли произведение $P(1)\cdot P(2)$ оканчиваться на 2021?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть x_0 – целый корень $P(x)$, то есть $P(x_0)=0$. Так как у многочлена $P(x)$ целые коэффициенты, то $P(x_0+2k)$ – четное число (это следует из того, что $(x_0+2k)^m-x_0^m$ делится $(x_0+2k)-x_0=2k$). Но тогда по крайней мере одно из чисел $P(1), P(2)$ является четным, а, значит, произведение $P(1)\cdot P(2)$ – четно и не может оканчиваться на 4321.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

11 класс

11.1-1. При каком наибольшем *n* существуют положительные числа $x_1, x_2, \boxed{?}, x_n$ такие, что $x_1 + x_2 + \boxed{?} + x_n = 25$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \boxed{?} + \frac{1}{x_n} = 1$?

Ответ. 5.

Решение. Перемножив равенства, получим

$$25 = (x_1 + x_2 + \boxed{?} + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\boxed{?} \quad + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{x_1}{x_1} + \frac{x}{x_2}\boxed{?} + \quad + \frac{x_1}{x_n} + \quad \boxed{?}\frac{x_n}{x_n} =$$

$$= n + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \boxed{?} + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \geq n + 2C_n^2 = n^2$$, так как $\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geq 2\sqrt{\frac{x_i}{x_j} \cdot \frac{x_j}{x_i}} = 2$.

Поэтому $n^2 \leq 25 \Rightarrow n \leq 5$.

Осталось заметить, что при $n = 5$ подойдут числа $x_1 = x_2 = \boxed{?} = x_5 = 5$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Только оценка – 5 баллов.

Только пример – 2 балла.

11.1-2. При каком наибольшем *n* существуют положительные числа $x_1, x_2, \boxed{?}, x_n$ такие, что $x_1 + x_2 + \boxed{?} + x_n = 1$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \boxed{?} + \frac{1}{x_n} = 36$?

Ответ. 6.

Решение. Перемножив равенства, получим

$$36 = (x_1 + x_2 + \boxed{?} + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\boxed{?} \quad + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{x_1}{x_1} + \frac{x}{x_2}\boxed{?} + \quad + \frac{x_1}{x_n} + \quad \boxed{?}\frac{x_n}{x_n} =$$

$$= n + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \boxed{?} + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \geq n + 2C_n^2 = n^2$$, так как $\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geq 2\sqrt{\frac{x_i}{x_j} \cdot \frac{x_j}{x_i}} = 2$.

Поэтому $n^2 \leq 36 \Rightarrow n \leq 6$.

Осталось заметить, что при $n = 6$ подойдут числа $x_1 = x_2 = \boxed{?} = x_6 = \frac{1}{6}$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Только оценка – 5 баллов.

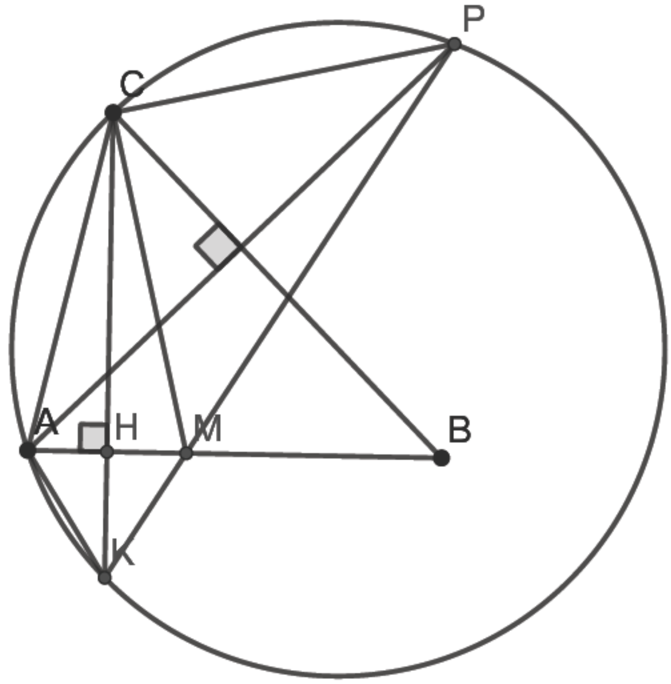
Только пример – 2 балла.

11.2-1. В остроугольном треугольнике *ABC* разность углов при вершинах *A* и *B* равна $20°$ (угол *A* больше угла *B*). Пусть *CH* – высота треугольника *ABC*. Точка *P* симметрична точке *A* относительно прямой *BC*. Прямая *CH* вторично пересекает окружность, описанную около треугольника *ACP*, в точке *K*. Прямая *KP* пересекает отрезок *AB* в точке *M*. Найдите угол *BCM*.

Ответ. $20°$.

Решение. Докажем сначала, что *AC*=*CM*. В силу того, что *CH* – высота треугольника *ACM*, равенство $AC = CM$ равносильно тому, что *CH* – серединный перпендикуляр к отрезку *AM*, то есть тому, что *KH* – серединный перпендикуляр к отрезку *AM*. А это равносильно тому, что $AK = KM$, то есть равенству $\angle AKH = \angle MKH$, то есть $\angle AKC = \alpha = \angle CKP = \beta$. Но $\alpha = \angle CPA$ (вписанные, опираются на дугу *AC*), $\beta = \angle CAP$ (вписанные, опираются на дугу *CP*). Наконец, по условию точки *A* и *P* симметричны относительно прямой *CB*, значит, $AC = CP$, и тогда $\alpha = \angle CPA = \beta = \angle CAP$. Таким образом, треугольник *ACM* – равнобедренный (*AC*=*CM*). Тогда

$$\angle BCM = 180° - \angle CAB - \angle CBA - \angle ACM =$$
$$= 180° - \angle CAB - \angle CBA - (180° - 2\angle CAB) = \angle CAB - \angle CBA = 20°.$$



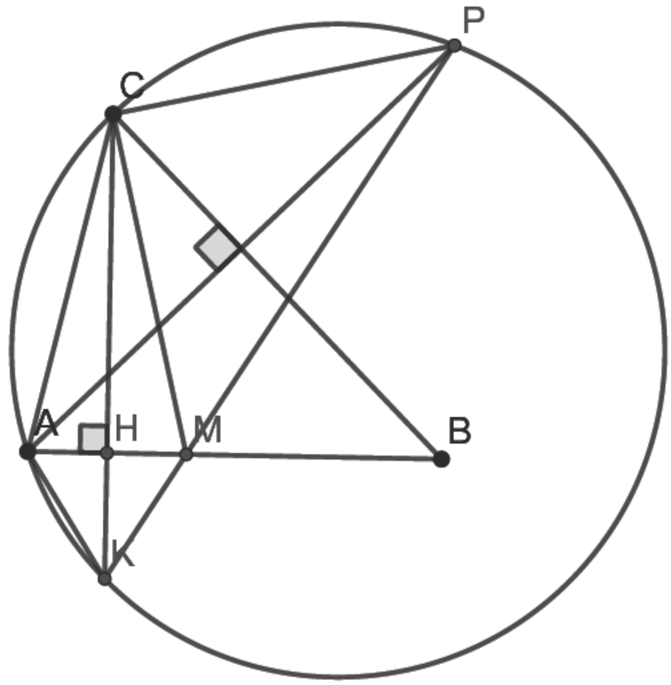
Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Доказано, что треугольник *ACM* – равнобедренный – 4 балла.

11.2-2. В остроугольном треугольнике *ABC* разность углов при вершинах *A* и *B* равна $25°$ (угол *A* больше угла *B*). Пусть *CH* – высота треугольника *ABC*. Точка *P* симметрична точке *A* относительно прямой *BC*. Прямая *CH* вторично пересекает окружность, описанную около треугольника *ACP*, в точке *K*. Прямая *KP* пересекает отрезок *AB* в точке *M*. Найдите угол *BCM*.

Ответ. $25°$.

Решение. Докажем сначала, что *AC*=*CM*. В силу того, что *CH* – высота треугольника *ACM*, равенство $AC = CM$ равносильно тому, что *CH* – серединный перпендикуляр к отрезку *AM*, то есть тому, что *KH* – серединный перпендикуляр к отрезку *AM*. А это равносильно тому, что $AK = KM$, то есть равенству $\angle AKH = \angle MKH$, то есть $\angle AKC = \alpha = \angle CKP = \beta$. Но $\alpha = \angle CPA$ (вписанные, опираются на дугу *AC*), $\beta = \angle CAP$ (вписанные, опираются на дугу *CP*). Наконец, по условию точки *A* и *P* симметричны относительно прямой *CB*, значит, $AC = CP$, и тогда $\alpha = \angle CPA = \beta = \angle CAP$. Таким образом, треугольник *ACM* – равнобедренный (*AC*=*CM*). Тогда $\angle BCM = 180° - \angle CAB - \angle CBA - \angle ACM =$
$= 180° - \angle CAB - \angle CBA - (180° - 2\angle CAB) = \angle CAB - \angle CBA = 25°$.



Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Доказано, что треугольник *ACM* – равнобедренный – 4 балла.

11.3-1. По одну сторону от плоскости α расположены точки *A*, *B*, *C*, по другую – точка *D*. Известно, что *ABCD* – параллелограмм, и расстояния от точек *A*, *B* и *C* до плоскости α равны, соответственно, 1, 5 и 3. Найдите расстояние от точки *D* до этой плоскости.

Ответ. 1.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма, A', B', C', D', O' – проекции соответствующих вершин и точки O на плоскость α. Тогда OO' – средняя линия трапеции $CC'A'A$, поэтому $OO' = \frac{CC' + AA'}{2}$. А так как *DO*=*OB*, то $DD' + OO' = BB' - OO'$. Отсюда $DD' = BB' - 2OO' = BB' - AA' - CC' = 1$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

11.3-2. По одну сторону от плоскости α расположены точки *A*, *B*, *C*, по другую – точка *D*. Известно, что *ABCD* – параллелограмм, и расстояния от точек *A*, *B* и *C* до плоскости α равны, соответственно, 2, 7 и 3. Найдите расстояние от точки *D* до этой плоскости.

Ответ. 2.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма, A', B', C', D', O' – проекции соответствующих вершин и точки O на плоскость α. Тогда OO' – средняя линия трапеции $CC'A'A$, поэтому $OO' = \frac{CC' + AA'}{2}$. А так как $DO=OB$, то $DD' + OO' = BB' - OO'$. Отсюда $DD' = BB' - 2OO' = BB' - AA' - CC' = 2$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

11.4-1. Известно, что три натуральных числа, образующих арифметическую прогрессию с разностью 10, являются делителями некоторого нечетного натурального числа *N*, причем первый член прогрессии является наименьшим делителем числа *N*, отличным от 1. Докажите, что *N* делится на 897.

Решение. Заметим, что среди делителей – чисел $k, k+10, k+20$ ровно одно делится на 3. Значит, число *N* делится на 3. Так как *N* – нечетное, то число 3 – его наименьший делитель, отличный от 1. Поэтому делителями *N* являются числа 3, 13, 23. А так как эти числа попарно взаимно просты, то *N* делится на $897 = 3 \cdot 13 \cdot 23$.

Комментарий. Замечено, что среди чисел $k, k+10, k+20$ ровно одно делится на 3 – 2 балла.

11.4-2. Известно, что три натуральных числа, образующих арифметическую прогрессию с разностью 14, являются делителями некоторого нечетного натурального числа *N*, причем первый член прогрессии является наименьшим делителем числа *N*, отличным от 1. Докажите, что *N* делится на 1581.

Решение. Заметим, что среди делителей – чисел $k, k+14, k+28$ ровно одно делится на 3. Значит, число *N* делится на 3. Так как *N* – нечетное, то число 3 – его наименьший делитель, отличный от 1. Поэтому делителями *N* являются числа 3, 17, 31. А так как эти числа попарно взаимно просты, то *N* делится на $1581 = 3 \cdot 17 \cdot 31$.

Комментарий. Замечено, что среди чисел $k, k+14, k+28$ ровно одно делится на 3 – 2 балла.

11.5. В одной тетради Вася записал 11 натуральных чисел. В другую тетрадь Петя записал наибольшие общие делители каждой пары чисел, записанных в васиной тетради.

Оказалось, что каждое число, записанное в одной из двух тетрадей, есть и в другой тетради. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано в васиной тетради?

Ответ. 10.

Решение.

Ответ. 10.

Заметим вначале, что для любых натуральных чисел $A \geq B$ выполняется неравенство $НОД(A;B) \leq A$, причем равенство выполняется только в случае, когда $A = B$. Пусть $A \geq B$ – два самых больших числа в васиной тетради. Тогда в петиной тетради число *A* может появиться только в одном случае, когда $A = B$; НОД всех других пар чисел будет меньше *A*. Значит, в васиной тетради не больше 10 различных чисел. Если Вася запишет в тетрадь числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 1024, то в петиной тетради будут записаны только такие же числа.

Комментарий. Только пример с 10 различными числами – 2 балла.

Только оценка – 5 баллов.

11.6. В шахматном турнире участвовали одиннадцатиклассники и десятиклассники. Одиннадцатиклассников было в 10 раз больше, и они набрали в 4,5 раза больше очков, чем десятиклассники. Ученик какого класса стал победителем турнира, и сколько очков он набрал? В шахматах за победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очков, за поражение – 0 очков.

Ответ. 10-классник, 10 очков.

Решение. Пусть в турнире участвовало *x* 10-классников и 10*x* 11-классников. Оценим, какое наибольшее количество очков могли набрать 10-классники и какое при этом наименьшее количество очков могли набрать 11-классники. Такое произойдет, если все 10-классники выиграли в партиях с 11-классниками. Тогда 10-классники наберут суммарно в играх между собой $\frac{x(x-1)}{2}$ очков и $x \cdot 10x$ в играх с 11-классниками. А 11-классники наберут суммарно $\frac{10x(10x-1)}{2}$.

Из условия следует, что $\left(10x^2 + \frac{x(x-1)}{2}\right) \cdot 4,5 \geq \frac{10x(10x-1)}{2} \Leftrightarrow x \leq 1$.

Поэтому единственная возможная ситуация, это когда в турнире участвовал один 10-классник и он выиграл все партии у 11-классников, то есть набрал 10 очков.

Комментарий. Только пример одного турнира – 1 балл.

11.7-1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень. Может ли произведение $P(0) \cdot P(1) \cdot P(2) \cdot P(3)$ оканчиваться на 1010?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть x_0 – целый корень $P(x)$, то есть $P(x_0) = 0$. Так как у многочлена $P(x)$ целые коэффициенты, то $P(x_0 + 2k)$ – четное число (это следует из того, что $(x_0 + 2k)^m - x_0^m$ делится $(x_0 + 2k) - x_0 = 2k$). Но тогда по крайней мере два из чисел $P(0), P(1), P(2), P(3)$ являются четным, а, значит, произведение $P(0) \cdot P(1) \cdot P(2) \cdot P(3)$ делится на 4 и не может оканчиваться на 1010.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

11.7-2. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень. Может ли произведение $P(2) \cdot P(3) \cdot P(4) \cdot P(5)$ оканчиваться на 2030?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть x_0 – целый корень $P(x)$, то есть $P(x_0) = 0$. Так как у многочлена $P(x)$ целые коэффициенты, то $P(x_0 + 2k)$ – четное число (это следует из того, что $(x_0 + 2k)^m - x_0^m$ делится $(x_0 + 2k) - x_0 = 2k$). Но тогда по крайней мере два из чисел $P(2), P(3), P(4), P(5)$ являются четным, а, значит, произведение $P(2) \cdot P(3) \cdot P(4) \cdot P(5)$ делится на 4 и не может оканчиваться на 2030.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

11.8. Даны действительные числа $a_1, a_2, \boxed{?}, a_7$ такие, что $a_1 = a_7 = 0$. Верно ли, что всегда можно выбрать индекс $k \le 5$ так, что будет выполняться неравенство $a_k + a_{k+2} \le a_{k+1}\sqrt{3}$?

Ответ. Верно.

Решение. Предположим противное, то есть для любого $k = 1, 2, 3, 4, 5$ выполняется неравенство $a_k + a_{k+2} > a_{k+1}\sqrt{3}$.

Тогда $(a_1 + a_3) + (a_3 + a_5) > a_2\sqrt{3} + a_4\sqrt{3} = (a_2 + a_4)\sqrt{3} > (a_3\sqrt{3})\sqrt{3} = 3a_3$ и $(a_3 + a_5) + (a_5 + a_7) > a_4\sqrt{3} + a_6\sqrt{3} = (a_4 + a_6)\sqrt{3} > (a_5\sqrt{3})\sqrt{3} = 3a_5$.

Сложив эти неравенства, получим

$(a_1 + a_3) + (a_3 + a_5) + (a_3 + a_5) + (a_5 + a_7) > 3a_3 + 3a_5$.

Учитывая, что $a_1 = a_7 = 0$, получаем противоречие $3a_3 + 3a_5 > 3a_3 + 3a_5$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.