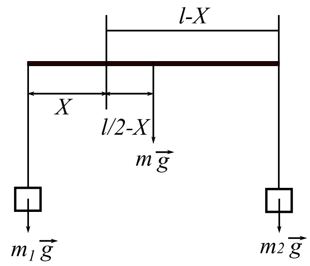
8 класс.

1. Запишем уравнение моментов относительно точки подвеса, учитывая, что сила тяжести стержня приложена к его центру масс:



$m_1gx = mg\left(\frac{l}{2} - x\right) + m_2g(l - x);\quad x = \frac{m+2m_2}{2(m_1+m_2+m)}l.$

<u>Вариант I</u>: $x_I = 10$ см $= 0{,}1$ м.

<u>Вариант II</u>: $x_{II} = 45$ см $= 0{,}45$ м.

<u>Критерии проверки:</u>

- Указано, что сила тяжести стержня приложена к его центру (или это подразумевается при записи уравнения моментов): 1 балл.
- Верно записано уравнение моментов: 7 баллов (суммируется с предыдущим пунктом).
- Найдена формула для x: 1 балл.
- Найден верный численный ответ: 1 балл.

2. *<u>Вариант I</u>*: Следующая встреча произойдет через $\frac{250}{2{,}2+2{,}8} = 50$ с после старта на расстоянии $2{,}2 \cdot 50$ м от первого (вдоль стадиона). Значит, каждая следующая встреча происходит через 110 метров от предыдущей.
Условие того, что через n встреч они оба окажутся в точке старта: $110n = 250m$, где m, n – натуральные числа. Находим тогда наименьшее n, удовлетворяющее этому уравнению: $n = 25$.
Первый спортсмен пробежит $25 \cdot 110$ м. Искомое время $t = \frac{25 \cdot 110}{2{,}2} = 1250$ с.

<u>Вариант II</u>: Следующая встреча произойдет через $\frac{200}{2{,}4+2{,}6} = 40$ с после старта на расстоянии $2{,}4 \cdot 40$ м от первого (вдоль стадиона). Значит, каждая следующая встреча происходит через 96 метров от предыдущей.
Условие того, что через n встреч они оба окажутся в точке старта: $96n = 200m$, где m, n – натуральные числа. Находим тогда наименьшее n, удовлетворяющее этому уравнению: $n = 25$.
Первый спортсмен пробежит $25 \cdot 96$ м. Искомое время $t = \frac{25 \cdot 96}{2{,}4} = 1000$ с.

<u>Критерии проверки:</u>

- Найдено время до первой встречи после старта: 2 балла.
- Найдено расстояние от точки старта до первой точки встречи: 2 балла.
- Сформулировано условие, при котором их встреча впервые после начала движения произойдет в точке старта (в виде уравнения на n и m или любом ином эквивалентном): 2 балла.
- Найдено число кругов до искомой встречи: 2 балла.
- Получен численный ответ: 2 балла.

3. Вычисляем отдельно работу A_1 по подъёму тела внутри жидкости и работу A_2 по подъёму тела в воздухе: $A_1 = gVh(\rho_{ст} - \rho_B)$; $A_2 = \rho_{ст}gVH$;
Искомая работа равна сумме:

$$A = A_1 + A_2 = gV[\rho_{ст}(H + h) - h\rho_B].$$

<u>Вариант I</u>: $A_{I} = 11{,}5$ Дж.

<u>Вариант II</u>: $A_{II} = 5{,}0$ Дж.

<u>Критерии проверки:</u>

- Формула для работы по подъёму в жидкости: 5 баллов.
- Формула для работы по подъёму в воздухе: 3 балла.
- Выписана верная общая формула для искомой работы: 1 балл.
- Найден верный численный ответ: 1 балл.

4. Площадь поверхности $S = a^2$; Сила давления на дно: $F_{дно} = \rho g a^3$, т. к. $P_{дно} = \rho g a$;

Поскольку давление жидкости на стенку меняется с уровнем линейно (от давления на дне до давления на поверхности):

$$P_{\text{среднее}} = P_{\text{боковое}} = ½\,(P_{\text{поверхности}} + P_{\text{дна}}) = \frac{1}{2}\rho g a^3.$$

Вариант I: $F_{\text{дно}} = 270$ Н, $F_{\text{бок}} = 135$ Н.

Вариант II: $F_{\text{дно}} = 64$, $F_{\text{бок}} = 32$ Н.

Критерии проверки:

- Выписана формула для давления на дно: 2 балла.
- Давление на стенку рассчитывается как среднее между давлением на поверхности и давлением на дне: 6 баллов.
- Найдена формула давления на стенку: 1 балл.
- Найден верный численный ответ для давления на стенку: 1 балл.

5. Из условия можем сразу записать уравнение, из которого выразить искомую скорость:

$$t = \frac{l}{U_2 - U_1} + \frac{l}{U_2 + U_1} \Rightarrow U_1 = U_2\sqrt{1 - \frac{2l}{U_2 t}}\,.$$

Вариант I: $U_{1_I} = 20{,}5$ м/с.

Вариант II: $U_{1_{II}} = 10$ м/с.

Критерии проверки:

- Выписано уравнение: 8 баллов.
- Из уравнения выражена искомая скорость: 1 балл.
- Найден верный численный ответ: 1 балл.

9 класс.

1. Окружность состоит из 8 резисторов: 4 радиусов с сопротивлением R и 4 дуг с сопротивлением $n\frac{\pi}{2}$R, где $n = 1$ для первого варианта и $n = 2$ для второго (этот результат следует из формулы $R = \rho\frac{L}{S}$, в которую входит длина проводника L). По «горизонтальному» диаметральному проводнику ток не идет в силу симметрии конструкции относительно «вертикального» диаметра. Рассматриваемая окружность эквивалентна трем параллельно подключенным проводникам: $2n$R, $2\left(n\frac{\pi}{2}R\right)$, $2\left(n\frac{\pi}{2}R\right)$, т. е. общее сопротивление окружности $R_\Sigma = nR\frac{2\pi}{\pi+4}$. Общий ток в цепи $I = \frac{E}{R + R_\Sigma} = \frac{E}{R}\frac{\pi+4}{(2n+1)\pi+4}$.

Критерии проверки:

- Записана формула для сопротивления через длину: 2 балла.
- Указано, по каким резисторам будет течь ток: 3 балла
- Записано общее сопротивление окружности: 3 балла.
- Записан верный ответ: 2 балла.

2. Уравнения движения автомобилей: $x_1 = x_{10} + U_1 t + \frac{at^2}{2}$; $x_2 = x_{20} + U_2 t$;

Расстояние между машинами $S = S_1 - (U_2 - U_1)t + \frac{at^2}{2}$, где $S_1 = x_{20} - x_{10}$ – дано по условию.

Пусть S_2 – минимальное расстояние. Оно достигается в момент времени $t = \frac{U_2 - U_1}{a}$ (вершина параболы);

Вычисляем это расстояние: $S_2 = (x_1 - x)_{min} = S_1 - \frac{(V_1 - V_2)^2}{2a}$;

Выражаем искомое ускорение: $a = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2(S_1 - S_2)}$.

Вариант I: $a_I \approx 3{,}3$ м/с^2.

Вариант II: $a_{II} \approx 3{,}7$ м/с^2.

Критерии проверки:

- Записаны уравнения движения обоих автомобилей: по 1 баллу каждое.
- Задача сведена к минимизации квадратичной функции: ещё 6 баллов.
- Выписана формула для искомого ускорения.
- Найден верный численный ответ: 1 балл.

3. Полезная мощность $\eta N = \frac{\Delta mgh}{\Delta t} = \frac{mgh}{t}$;

Отсюда можем выразить искомое время: $t = \frac{mgh}{\eta N} = \frac{mgL\sin\alpha}{\eta N}$.

Вариант I: $t_I \approx 30$ с.

Вариант II: $t_{II} \approx 44$ с.

Критерии проверки:

- Численный ответ стоит 1 балл из 10.

4. Выразим вес тела в среде через данные в условии параметры:

$$P_1 = \left(0{,}02V\rho_{\text{деф}} + 0{,}98\rho_1 V\right)g - g\rho V;$$

Выразим из записанного уравнения искомую плотность:

$$\rho_{\text{деф}} = \frac{P_1}{0{,}02gV} + \frac{\rho}{0{,}02} - \frac{0{,}98}{0{,}02}\rho = \frac{50P_1}{gV} + 50\rho - 49\rho.$$

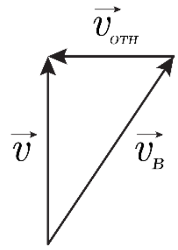
Вариант I: $\rho_{\text{деф}I} \approx 4$ г/см^3 (если при решении полагалось $g = 10$ м/см^2) или $\rho_{\text{деф}I} \approx 7$ г/см^3 (если при решении полагалось $g = 9{,}8$ м/см^2).

Вариант II: $\rho_{\text{деф}II} \approx 0$ г/см^3 (если при решении полагалось $g = 10$ м/см^2) или $\rho_{\text{деф}II} \approx 4$ г/см^3 (если при решении полагалось $g = 9{,}8$ м/см^2).

Критерии проверки:

- Выписано уравнение для P_1: 7 баллов.
- Найдена формула $\rho_{\text{деф}}$: 2 балла.
- Найден верный численный ответ: 1 балл.

5. Из векторного треугольника скоростей по теореме Пифагора вычисляем искомую скорость:



$U_{\text{В}} = \sqrt{U^2 + U_{\text{отн}}^2}$.

Вариант I: $U_{\text{I}} = 28$ м/с.

Вариант II: $U_{\text{II}} = 18$ м/с.

Критерии проверки:

- Численный ответ стоит 1 балл из 10.
- Неверно записано правило сложения скоростей (или неверно нарисован векторный треугольник скоростей): 0 баллов за всю задачу.

10 класс.

1. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$\left.\begin{aligned} \text{ЗСИ: } & mV_1 = Mu + mV_2 \\ \text{ЗСЭ: } & \frac{Mu^2}{2} = Mgl(1-\cos\alpha) \end{aligned}\right\}$$

Из первого уравнения найдём скорость шарика сразу после вылета пули: $u = \frac{(V_1 - V_2)}{M}$;

После подстановки во второе уравнение вычислим $\cos\alpha = 1 - \frac{m^2(V_1-V_2)^2}{2M^2gl}$.

Вариант I: $\alpha = 60^o$.

Вариант II: $\cos\alpha = -\frac{1}{8}$, $\alpha = 97^o$.

Критерии проверки:

- ЗСИ и ЗСЭ – по 2 балла за каждый.
- Скорость шарика сразу после вылета пули: 2 балла.

- Выписана итоговая формула для косинуса: 3 балла.
- Численный ответ: 1 балл.

2. Поскольку $P = a - bV$, для изменения давления и объёма за некоторый промежуток времени можем записать $\Delta P = b\Delta V$. Это значит, что $V_2 - V_1 = \frac{1}{b}(P_1 - P_2)$. Остается вычислить работу:

$$A_{12} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(V_2 - V_1) = \frac{P_1^2 - P_2^2}{2b}.$$

<u>Вариант I</u>: $A_{12_I} = 3$ МДж.
<u>Вариант II</u>: $A_{12_{II}} = 5$ МДж.
<u>Критерии проверки:</u>

- Уравнение в приращениях: 4 балла.
- Формула для работы как площади под графиком: 5 баллов.
- Численный ответ: 1 балл.

3. Масса льда – $9n$ кг (n – номер варианта). Масса воды – $2n$ кг.
Разница энергий для доведения вещества до 0^oC для льда и воды равна: $Q_л - Q_в = 6 \cdot 2100n$ Дж.
Эта энергия идет на кристаллизацию воды: $\Delta m = \frac{Q_л - Q_в}{\lambda} = 420n$ г.
<u>Критерии проверки:</u>

- Записано уравнение теплового баланса: 3 балла.
- Найдено количество теплоты, которое идёт на кристаллизацию воды: 4 балла
- Вычислено количество кристаллизовавшейся воды: 2 балла.
- Найден верный численный ответ: 1 балл.

4. Мощность при замкнутом ключе: $P = I^2 R_1 = \left(\frac{\varepsilon}{r + R_1}\right)^2 R_1$.
Мощность при разомкнутом ключе: $P = I_2^2(R_1 + R_2) = \left(\frac{\varepsilon}{r + R_1 + R_2}\right)^2 (R_1 + R_2)$.
Приравнивая два выражения для P, находим $\frac{R_1}{(r+R_1)^2} = \frac{R_1 + R_2}{(r + R_1 + R_2)^2}$.
Отсюда несложно выразить $r = \sqrt{R_1(R_1 + R_2)}$.
<u>Вариант I</u>: $r_I = 6$ Ом.
<u>Вариант II</u>: $r_{II} = 12$ Ом.
<u>Критерии проверки:</u>

- Выписаны мощности в обоих случаях: по 2 балла за каждую.
- Получена формула для искомого сопротивления: 5 баллов.
- Численный ответ: 1 балл.

5. По формуле тонкой линзы: $\frac{1}{F/n} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \to f = -\frac{F}{n-1} < 0$;
Изображение мнимое с увеличением $\Gamma = -\frac{n}{n-1} = \frac{f}{d}$.
<u>Вариант I</u>: $\Gamma_I = -2$.
<u>Вариант II</u>: $\Gamma_{II} = -3$.
<u>Критерии проверки:</u>

- Выписана формула тонкой линзы: 1 балл.
- Охарактеризовано изображение: 4 балла.
- Вычислено увеличение: 5 баллов.

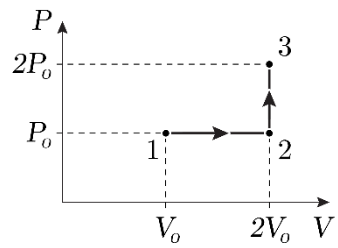
11 класс.

1. Воспользуемся законом сохранения энергии: приравняем энергию системы в моменты наибольшей скорости и наибольшего растяжения пружины: $\frac{mU^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$. Отсюда сразу находим искомую скорость $U = A\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Вариант I: $U_I = 2$ м/с.
Вариант II: $U_{II} = 1{,}73$ м/с.
Критерии проверки:
- ЗСЭ: 7 баллов.
- Из ЗСЭ выражена искомая скорость: 2 балла.
- Численный ответ: 1 балл.

2. Запишем второй закон Ньютона в случае, когда пружина не растянута: $m\omega_1^2 l_0 = \mu mg$;
После увеличения угловой скорости и растяжения пружины второй закон Ньютона запишем в виде $m\omega_2^2 2l_0 = \mu mg + kl_0$. Находим отсюда $m(2\omega_2^2 - \omega_1^2) = k$; $\omega = 2\pi n$; $k = 4\pi^2 m(2n_2^2 - n_1^2)$.
Вариант I: $k_I = 182$ Н/м.
Вариант II: $k_{II} = 553$ Н/м.
Критерии проверки:
- Запись второго закона Ньютона для двух ситуаций: по 3 балла за каждый случай.
- Выписана итоговая формула для k: 3 балла.
- Численный ответ: 1 балл.

3. Обозначим начальное состояние номером 1, состояние после изобарного процесса и перед началом изохорного номером 2, конечное состояние после изохорного процесса номером 3. Обозначим для первого варианта параметр $n = 2$, а для второго $n = 1{,}5$. Тогда можем записать давление и объёмы в состояниях 2 и 3: $V_2 = nV_1$; $V_3 = nV_1$; $P_2 = P_1$; $P_3 = nP_1$; $PV = \nu RT$.



Вычисляем искомую подведённую теплоту:
$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \nu C_p(T_2 - T_1) + \nu C_v(T_3 - T_2) = \frac{\nu RT}{2}(3n^2 + 2n - 5).$$
Вариант I: $Q_I = 24{,}8$ кДж.
Вариант II: $Q_{II} = 5{,}4$ кДж.
Критерии проверки:
- Давление и объём в состояниях 2 и 3 выражены через соответствующие параметры в состоянии 1: 2 балла.
- Найдена общая формула для Q через теплоёмкости, количество вещества и разницы температур: 7 баллов.
- Численный ответ: 1 балл.

4. Из второго закона Ньютона можем записать $\frac{mU^2}{R} = eUB$.
Длину пути находим по формуле $l = \frac{U^2}{2a_\tau} = \frac{mU^2}{2eE} = \frac{eB^2R^2}{2Em}$.
Вариант I: $l_I = 19{,}8$ см.
Вариант II: $l_{II} = 117$ см.
Критерии проверки:
- Второй закон Ньютона: 2 балла.
- Итоговая формула для длины пути: 7 баллов.
- Численный ответ: 1 балл.

5. Запишем систему из двух уравнений: формулы тонкой линзы и результата взятия производной по времени с обеих сторон в формуле тонкой линзы:
$$\begin{cases} v\cos\alpha = \left(\dfrac{f}{d}\right)^2 U\cos\alpha \\ d = \dfrac{f \cdot F}{f - F} \end{cases}$$
Отсюда несложно выразить $v = \frac{F^2}{(f-F)^2}U$. Отметим, что в конечную формулу не входит угол.

Вариант I: $U_I = 8$ см/с.
Вариант II: $U_{II} = 3$ см/с.
Критерии проверки:

- Формула тонкой линзы: 2 балла.
- Первое уравнение системы: 6 баллов.
- Конечная формула для v: 1 балл.
- Численный ответ: 1 балл.